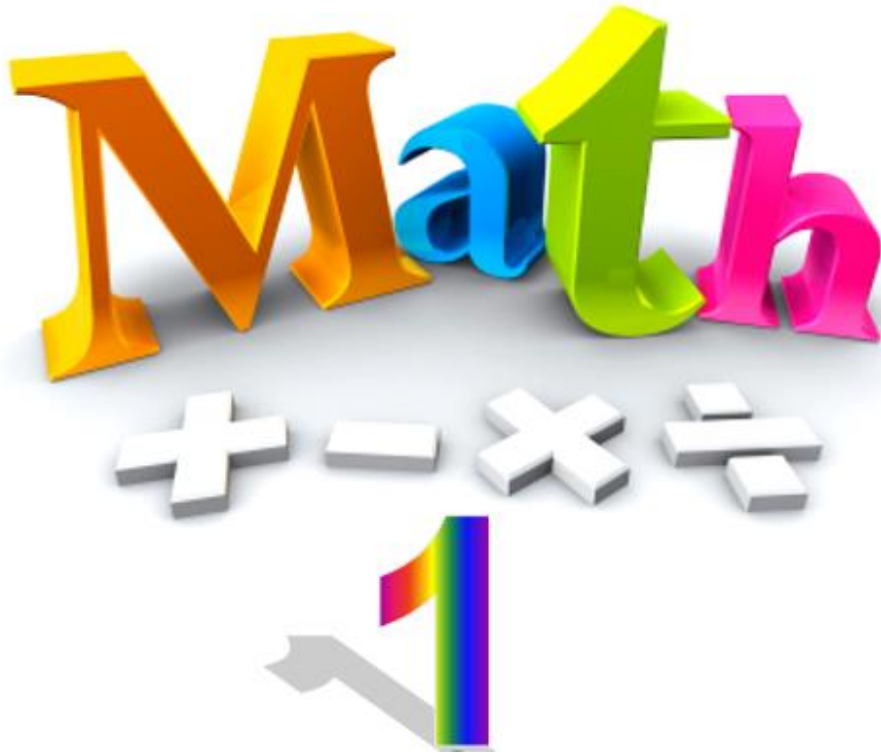


رياضيات (١)

Mathematics (1)



الفهرس

٤	الرموز المستخدمة ودلالاتها
٥	الباب الأول: المجموعات والعمليات عليها
٦	تعريف المجموعة
٧	رموز المجموعات وعناصرها
١٠	تساوي مجموعتين
١٠	المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية
١٢	تمارين (١-١)
١٤	العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد النسبية
١٥	عملية الضرب والقسمة
١٦	جمع وطرح الأعداد العشرية
١٧	ضرب الأعداد العشرية
١٧	قسمة الأعداد العشرية
١٨	تقريب الأعداد العشرية
١٩	بعض خواص الأعداد الحقيقية
٢٠	ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية
٢١	تعريف الأسس
٢٣	قوانين الأسس
٢٦	تمارين (٢-١)
٢٩	الباب الثاني: كثيرات الحدود
٣٠	تعريف كثيرات الحدود Polynomial
٣١	جمع وطرح كثيرات الحدود
٣١	ضرب كثيرات الحدود
٣٣	قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)
٣٤	تمارين (١-٢)
٣٦	طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م.)
٣٧	طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c
٣٩	طريقة تحليل فرق ما بين مربعين
٤٠	تمارين (٢-٢)
٤٢	الكسور الجبرية (العبارات النسبية)
٤٢	خصائص الكسور الجبرية
٤٣	اختصار الكسور الجبرية
٤٥	تمارين (٣-٢)
٤٩	الباب الثالث: المعادلات
٥٠	تعريف المعادلات Equations
٥٢	أنواع المعادلات
٥٢	حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد
٥٥	تمارين (١-٣)
٥٦	المعادلات الخطية
٥٧	المعادلات الخطية ذات مجهول واحد
٥٩	الحل بطريقة التعويض

٦٢	الحل بطريقة كرامر
٦٥	تمارين (٢-٣)
٦٦	الباب الرابع: المساحات والحجوم
٦٧	الهندسة المستوية
٦٨	متوازي الأضلاع Parallelogram
٦٩	المستطيل Rectangle
٧١	المربع Square
٧٢	المعين rhombus
٧٣	شبه المنحرف Trapezoid
٧٤	المثلث Triangle
٧٥	الدائرة Circle
٧٧	تمارين (١-٤)
٧٨	الحجوم Size
٧٩	متوازي المستطيلات Cuboid
٨٠	المكعب Cube
٨١	الأسطوانة Cylinder
٨٢	المخروط Cone
٨٣	الكرة Sphere
٨٥	تمارين (٢-٤)
٨٦	الباب الخامس: الهندسة التحليلية
٨٧	مبادئ الهندسة التحليلية
٨٨	نظام المحاور الديكارتي
٨٩	المسافة بين نقطتين
٩١	إحداثيات نقطة المنتصف
٩٢	تمارين (١-٥)
٩٣	ميل الخط المستقيم
٩٣	طريقة الميل ونقطة
٩٤	طريقة الميل والجزء المقطوع
٩٦	الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة
٩٨	نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور
٩٩	تمارين (٢-٥)
١٠١	المصطلحات العلمية
١٠٢	المراجع

المقدمة

عزيزي الطالب، بين يديك كتاب "رياضيات ١" وهو الجزء الأول من منهج الرياضيات الذي سوف تدرسه خلال فترة دراستك بالمدرسة، وهو مكون من ستة أبواب رئيسية، فنبدأ بالبواب الأول "المجموعات والعمليات عليها" ويشمل تعريف المجموعة وأنواعها والعمليات الأساسية على المجموعات وكذلك العمليات الحسابية على الأعداد العشرية وغيرها، يتبعه الباب الثاني ويحتوي على شرح كثيرات الحدود وإجراء العمليات الحسابية عليها وطرق تحليلها وكذلك حساب الكسور الجبرية واختصارها. الباب الثالث يقدم شرحا لكيفية حل لمعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهولا واحدا وذات المجهولين، بينما يقدم الباب الرابع شرحا مبسطا مدعما بالأمثلة للمساحات والحجوم للأشكال والمجسمات الأساسية. الباب الخامس يقدم بعضا من أساسيات الهندسة التحليلية متضمنا على كيفية حساب المسافة بين نقطتين وميل الخط المستقيم وغيرها، أخيرا يقدم لك الباب السادس أساسيات علم التفاضل.

وبالتالي فإن الكتاب ملم بمعظم المعارف والنظريات التي سوف تساعدك على إتمام دراستك في باقي العلوم التطبيقية وفي ضوء ما سبق قد رعي في الكتاب أن يكون ذو أسلوب بسيط لضمان وصول المعلومة بطريقة سهلة وسريعة، وأن يشتمل على أمثلة متدرجة في الصعوبة تمثل مستويات التفكير المتنوعة مع تدريبات وأسئلة ينتهي بها كل درس.

أخيرا ... نتمنى لك عزيزي الطالب كل النجاح والتفوق في حياتك الدراسية والعملية

فريق التأليف والمراجعة

شركة يات لحلول التعليم

الرموز المستخدمة ودلالاتها

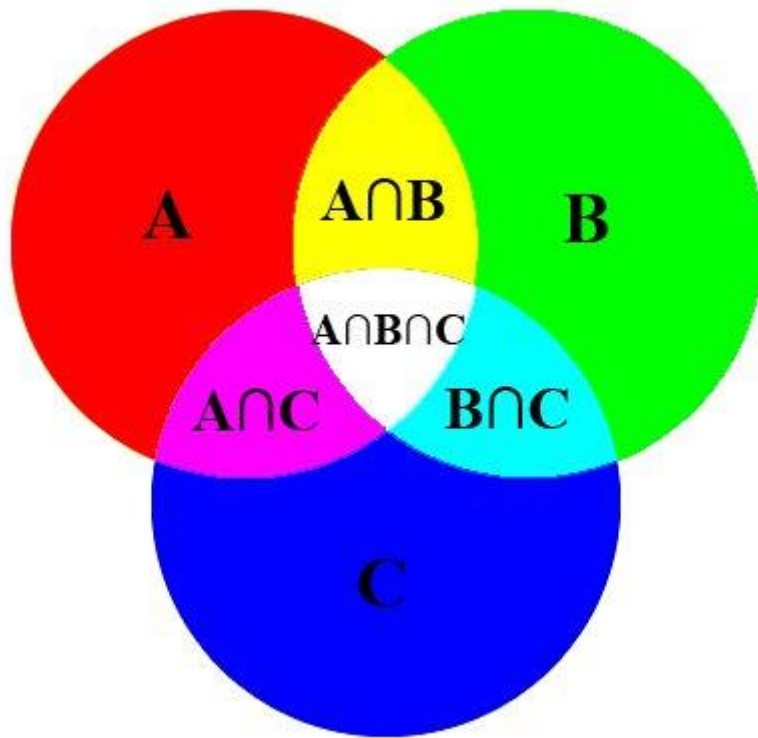
الرموز المستخدمة ودلالاتها للمجموعات:

الرمز	الرمز العربي	المعنى
N	ط	مجموعة الأعداد الطبيعية = مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومعها الصفر
Z	ص	مجموعة الأعداد الصحيحة
Q	ن	مجموعة الأعداد النسبية
R	ح	مجموعة الأعداد الحقيقية
\emptyset	\emptyset	المجموعة الخالية

الرموز المستخدمة ودلالاتها للمساحات والحجوم:

الرمز	المعنى	المصطلح بالإنجليزية
A	مساحة السطح لمسطح ما	Area
P	محيط مسطح ما	Peripheral
h	الارتفاع	Height
L	طول خط مستقيم - أو الطول عموماً	Length
d	مسافة	Distance
r	نصف القطر الدائرة	radius
m	ميل المماس أو ميل الخط المستقيم	Slope
w	العرض	Width
d	القطر	Diameter
V	الحجم	Volume

الباب الأول: المجموعات والعمليات عليها



الهدف العام

معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها، والمجموعات العادية المشهورة والقيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية

بعد دراسة هذا الباب يتمكن المتدرب من:

١. تعريف المجموعات وتحديد خصائصها.
٢. إجراء العمليات على المجموعات.
٣. تصنيف الأعداد حسب مجموعاتها العددية.
٤. القيام بالعمليات الحسابية على الأعداد النسبية والعشرية.
٥. معرفة حساب الأسس وتقريب الأعداد العشرية.

المجموعات Sets

تعريف المجموعة

تعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تمييزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه.

مثال على ذلك المجموعات التالية:

أ. مجموعة الأعداد ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠

ب. مجموعة الاثني عشر شهرا في السنة الميلادية.

ج. مجموعة الأعداد الكبيرة.

د. مجموعة الحدائق الجميلة في مصر.

ففيها نعتبر أ و ب مجموعتين؛ لأن عناصرها معروفة ومحددة، أما المجموعتان ج و د فلا نعتبرهما – رياضيا – مجموعتين؛ لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى آخر. فإذن عناصر ج و د غير معروفة وغير محددة؛ ولذلك لا نعتبرهما مجموعتين. وعندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نعني ضمنا مجموعة رياضية.

رموز المجموعات وعناصرها

عادة ما نرسم للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A, B, X, Y, \dots الخ بينما نرسم للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a, b, x, y, \dots الخ. وعادة ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع $\{ \}$ وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $2, 0, 1, \pi$ كالتالي:

$$A = \{-2, 0, 1, \pi\}$$

ولما كان 0 عنصراً من المجموعة فإننا نرسم لذلك رياضياً بالعلاقة $0 \in A$ ونقرأها 0 ينتمي إلى A . أما العنصر 5 مثلاً فلا ينتمي إليه ونعبر عن هذا $5 \notin A$ ونقرأ 5 لا ينتمي إلى A .

مجموعات الأعداد:

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية، كل منها توسيع وامتداد لسابقتها وقد سبق للمتدرب دراستها في مراحل التعليم العام. وفيما يلي تذكير وتأسيس لهذه المجموعات:

مجموعة الأعداد الطبيعية

وهي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مضافاً إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف N .

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة

بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعة W نحصل على مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة و نرسم لها بالحرف Z ، أذن:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية

وهي التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط ألا يساوي المقام فيها الصفر ونرسم لها بالحرف Q . وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

نلاحظ هنا أن أي عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر بحيث يكون المقام في هذا الكسر 1 ، فمثلاً $\frac{-2}{1} = -2$ وبشكل أعم $\frac{m}{1} = m$.



العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{m}{n}$ حيث m و n أعداد صحيحة و $n \neq 0$ يسمى عدد غير نسبي فمثلا الأعداد التالية: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{6}$ كل منها عدد غير نسبي ويرمز لمجموعة الأعداد الغير نسبية لها بالرمز I

مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرسم لها بالرمز R تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية بالإضافة إلى الأعداد غير النسبية .

طرق تعريف المجموعات:

هناك ثلاث طرق لتعريف المجموعة، وهي كما يلي:

طريقة التعريف بعبارة:

في هذه الطريقة نكتفي بذكر عبارة معينة يمكن عندها تحديد عناصر المجموعة فمثلا نقول A هي مجموعة الأعداد الطبيعية. هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيه العلاقة بين العناصر غير واضحة.

طريقة السرد أو حصر العناصر:

وفيها نقوم بذكر جميع عناصر المجموعة. فمثلا A مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 9 هي:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

علما أن هذه الطريقة غير مناسبة إلا للمجموعات قليلة العناصر، فمثلا لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. ونلاحظ أن ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة، فان المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة: $A = \{4, 6, 2, 8\}$ كما نلاحظ كذلك أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة، فمثلا المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة $A = \{2, 4, 4, 6, 2, 8\}$

طريقة القاعدة المعينة:

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر، بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة، فمثلا المجموعة $A = \{2, 4, 6, 8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

$$A = \{x: x \in \mathbb{N}, x \text{ عدد زوجي}, 2 \leq x \leq 8\}$$

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x ، حيث ان x عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي 2 و أصغر من أو يساوي 8.

المجموعة الجزئية:

نقول أن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A , أو بمعنى آخر أن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A و نرسم لهذا كالتالي : $B \subset A$ و يمكن كتابتها رياضياً كالتالي :

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A : \forall (\text{يقراً مهما يكون})$$

إذا كانت $B \subset A$ و $A \neq B$ فنقول ان B مجموعة جزئية فعلية من A و نكتب $B \subsetneq A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فتكتب $B \not\subset A$.

مثال ١

لتكن المجموعات التالية:

$$A = \{3, 5, 11, 24\}$$

$$B = \{5, 24\}$$

$$C = \{3, 11, 12\}$$

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة B و C مع A ان :

$B \subset A$ لكن $C \not\subset A$ لأن العدد 12 لا ينتمي إلى A .

من تعريف مجموعة الأعداد نلاحظ أن N مجموعة جزئية من W و W مجموعة جزئية من Z ، و Z مجموعة جزئية من Q و Q مجموعة جزئية من R ، أي باستخدام رمز الأحتواء يكون لدينا :

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$



تساوي مجموعتين

نقول أن المجموعتين A و B متساويتان، ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منها مجموعة جزئية من الأخرى، أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ و } B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

مثال ٢:

هل المجموعتان التاليتان متساويتان؟

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{x : x \in W, x^2 - x = 0\}$$

الحل:

عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن عناصر المجموعة B غير محددة فيجب علينا إذن تحديد عناصرها ويتم ذلك بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x - 1 = 0, x = 1$$

إذن : $B = \{0, 1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$

المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلا يمكن أن نصنف جميع طلبة المدرسة كمجموعة أساسية، بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعة جزئية من المجموعة الأساسية.

نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية المجموعة الشاملة ونرمز لها بالرمز U فمثلا تعتبر المجموعة

$$U = \{2, -5, 7, 21\}$$
 هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A = \{2, 21\}$ و

$$B = \{-5, 7, 21\}$$
 لأن المجموعات A و B مجموعات جزئية من U .

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز \emptyset (تنطق فاي) أو $\{\}$. فمثلا المجموعة $A = \{x : x < 0, x > 0\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك أي عنصر يحقق الشرط المذكور. فمفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. وتعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى.

خصائص المجموعة الجزئية:

1) $\emptyset \subset A \subset U$

2) $A \subset A$

3) $A \subset B$ و $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

4) $A = B \Rightarrow A \subset B$ و $B \subset A$

تمارين (1-1)

تمرين 1: أي من الجمل التالية تحدد مجموعة رياضية:

- مجموعة القاعات الكبيرة داخل المدرسة.
- مجموعة المسلمين الذين شهدوا غزوة بدر.
- مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 5.
- مجموعة الأعداد الطبيعية التي هي أكبر من 1 وأصغر من 2.
- مجموعة الطلبة الأذكى في المدرسة.

تمرين 2: أذكر عناصر المجموعات التالية:

$$1) A = \{x : x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$$

$$2) B = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ عدد فردي}, 3 \leq x < 11\}$$

$$3) C = \{x : x \in \mathbb{N}, 4x - 3 = 1\}$$

$$4) D = \{x : x \in \mathbb{N}, x + 1 = 0\}$$

$$5) E = \{x : x = 5n - 6, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < 5\}$$

$$6) F = \{x : x \in \mathbb{N}, \sqrt{x^2 + 1} = 2\}$$

تمرين 3: عبر عن المجموعات التالية بقاعدة معينة:

$$1) A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$2) B = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$3) C = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$4) D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

تمرين 4: لتكن المجموعات التالية:

$$A = \{1\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 3, 5\}, D = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

$$U = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$$

املا الفراغات التالية بالرمز المناسب حسب المجموعات السابقة:

1) $\emptyset \dots\dots A$

2) $A \dots\dots B$

3) $B \dots\dots C$

4) $B \dots\dots E$

5) $C \dots\dots D$

6) $C \dots\dots E$

7) $D \dots\dots E$

8) $D \dots\dots U$

تمرين ٥ : هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة؟

1) $a = \{ a \}$

2) $5 \in \{ 5 \}$

3) $9 \in \{ 1, 3, 6, \dots \dots \}$

4) $\emptyset \subset A$

5) $A \notin U$

6) $\emptyset \in \{ \emptyset \}$

7) $4 \in \{ 1, 2, 3, \{ 4 \} \}$

8) $7 \notin \{ 3, 4, 2, \{ 5 \} \}$

العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية

العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد النسبية

عملية الجمع والطرح(١) إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b} \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

(٢) إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

مثال ٣: احسب ما يلي:

1) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

2) $\frac{7}{11} - \frac{2}{11}$

3) $\frac{2}{9} + \frac{5}{4}$

4) $\frac{9}{11} - \frac{2}{7}$

5) $\frac{17}{36} + \frac{7}{27}$

6) $\frac{23}{15} - \frac{13}{24}$

الحل:

1) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$

2) $\frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$

3) $\frac{2}{9} + \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4 + 5 \times 9}{9 \times 4} = \frac{8 + 45}{36} = \frac{53}{36}$

4) $\frac{9}{11} - \frac{2}{7} = \frac{9 \times 7 - 2 \times 11}{11 \times 7} = \frac{63 - 22}{77} = \frac{41}{77}$

$$5) \frac{17}{36} + \frac{7}{27} =$$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات يساوي 108 ومنه:

$$\frac{17}{36} + \frac{7}{27} = \frac{17 \times 3}{108} + \frac{7 \times 4}{108} = \frac{51}{108} + \frac{28}{108} = \frac{79}{108}$$

$$6) \frac{23}{15} - \frac{13}{24} =$$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات يساوي 120 ومنه:

$$\frac{23}{15} - \frac{13}{24} = \frac{23 \times 8}{120} - \frac{13 \times 5}{120} = \frac{88}{120} - \frac{65}{120} = \frac{88 - 65}{120} = \frac{23}{120}$$

عملية الضرب والقسمة

عملية الضرب:

إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ فإن:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

لحساب حاصل ضرب كسرين نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

عملية القسمة:

إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ و $c \neq 0$ فإن:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

لحساب حاصل قسمة كسرين نحول القسمة إلى ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

مثال ٤: احسب ما يلي:

$$1) \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$2) \frac{7}{9} \times \frac{2}{5}$$

$$3) \frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$$

$$4) \frac{7}{9} \div \frac{2}{5}$$

الحل:

$$1) \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$2) \frac{7}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{9 \times 5} = \frac{14}{45}$$

$$3) \frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$$

$$4) \frac{7}{9} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{18}$$

العمليات الحسابية على الأعداد العشرية

جمع وطرح الأعداد العشرية

يتم جمع أو طرح الأعداد العشرية بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث أن ذلك لا يؤثر في قيمة العدد العشري، ثم نجمع أو نطرح الأعداد في الخانات المتناظرة كما في جمع أو طرح الأعداد الصحيحة مع الاحتفاظ بموضع الفاصلة العشرية.

مثال ٥: احسب ما يلي:

$$27.345 + 49.57 + 0.436 =$$

$$19.7694 - 5.835 =$$

الحل:

$$1) 27.345 +$$

$$49.570 +$$

$$0.436 =$$

$$77.351$$

$$2) 19.7694 -$$

$$5.8350 =$$

$$13.9344$$

ضرب الأعداد العشرية

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ثم نضع الفاصلة العشرية بحيث يكون عدد الخانات العشرية في ناتج الضرب يساوي مجموع عدد الخانات العشرية للعددين العشريين.

مثال توضيحي:

أوجد حاصل ضرب

$$3.25 \times 3.7 =$$

نجري أولاً:

$$325 \times 37 = 12025$$

وحيث أن مجموع الخانات هو $2 + 1 = 3$

فتحدد الفاصلة في ناتج الضرب بثلاث خانة ابتداء من يمين العدد لنحصل على:

$$3.25 \times 3.7 = 12.025$$

قسمة الأعداد العشرية

لقسمة الأعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانة ونلغي الفواصل، ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف إلى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر إلى القاسم كلما أصبح أقل من المقسوم عليه كما في المثال التالي:

أوجد خارج قسمة

$$21.556 \div 6.8 =$$

نوحّد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب خارج قسمة

$$21556 \div 6800 \text{ والتي نجريها كما يلي:}$$

$$\begin{array}{r}
 3.17 \\
 6800 \overline{) 21556} \\
 \underline{- 20400} \\
 11560 \\
 \underline{- 6800} \\
 47600 \\
 \underline{- 47600} \\
 00000
 \end{array}$$

وبذلك فإن الناتج هو: $21.556 \div 6.8 = 3.17$

يمكن استخدام الآلة الحاسبة



مثال ٦: أوجد ناتج ما يلي:

1) $327.345 \times 409.67 =$

2) $130.4224 \div 15.38 =$

3) $427.6524 \div 0.49 =$

الحل:

1) $327.345 \times 409.67 = 134103.4262$

2) $130.4224 \div 15.38 = 8.48$

3) $427.6524 \div 0.49 = 872.76$

تقريب الأعداد العشرية

لتقريب عدد عشري إلى منزلة محددة نتبع ما يلي:

للـ إذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أقل من العدد ٥ نحذفه مع جميع الأرقام الواقعة عن يمينه.

للـ وإذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أكبر أو يساوي العدد ٥ فنضيف ١ إلى رقم المنزلة المحددة ونحذف جميع الأرقام الواقعة عن يمينه.

مثال ٧: قرب العدد 27.8256 إلى:

١. أقرب عدد صحيح

٢. أقرب 0.1

٣. أقرب 0.01

٤. أقرب 0.001

الحل:

١. أقرب عدد صحيح هو 28

٢. أقرب 0.1 هو 27.8

٣. أقرب 0.01 هو 27.83

٤. أقرب 0.001 هو 27.826

بعض خواص الأعداد الحقيقيةإذا كانت a, b, c أعدادا حقيقية فسيكون لدينا ما يلي:١. عملية الجمع تبديلية: $a + b = b + a$ ٢. عملية الجمع تجميعية: $a + (b + c) = (a + b) + c$ ٣. عملية الضرب تبديلية: $ab = ba$ ٤. عملية الضرب تجميعية: $a(bc) = (ab)c$ ٥. عملية الضرب توزيعية بالنسبة للجمع: $a(b + c) = ab + ac$ ٦. إذا كان $a = b$ فإن $ac = bc$ و $a + c = b + c$ ٧. الصفر عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $a + 0 = 0 + a = a$ ٨. العدد ١ عنصر حيادي بالنسبة للضرب: $a \times 1 = 1 \times a = a$ ٩. لكل عدد حقيقي a يوجد عدد حقيقي يرمز له $(-a)$ يسمى نظير a حيث أن:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

١٠. إذا كان $a \neq 0$ فإنه يوجد عدد يرمز له $a^{-1} = \frac{1}{a}$ يسمى معكوس a حيث أن:

$$a \left(\frac{1}{a} \right) = \left(\frac{1}{a} \right) a = 1$$

ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية

لمنع حدوث خطأ أو التباس أثناء حل المسائل نستخدم ترتيب العمليات الحسابية كما يلي:
 ١. الأقواس: إذا كان في المسألة الحسابية أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو

ما يسمى بفك الأقواس

○ القوس الدائري ()

○ القوس المربع []

○ قوس المجموعة { }

٢. نحسب القوى والجزور.

٣. نقوم بعملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

٤. نقوم بعملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

نقوم بالعمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر أي في البسط و المقام كل على حدة

مثال ٨:

احسب ما يلي:

$$1) 8.7 + 5.4 - 7 =$$

$$2) 11.25 - 22.3 + 1.7 =$$

$$3) 4.2 - - 6 =$$

$$4) 122.5 - (6.3 - 9.5) =$$

$$5) 305 + (5.2 - 8)$$

$$6) \frac{125 + 7 - 132}{3 - 5 + 8} =$$

$$7) 8.2 + 3.84 \div 3.2 =$$

$$8) \frac{7.2 - 15(3.4 + 2.3)}{116.8 + 6 \times 3.7} =$$

$$9) 0.81 \div (0.9 \times 0.1) =$$

الحل:

1) $8.7 + 5.4 - 7 = 14.1 - 7 = 7.1$

2) $11.25 - 22.3 + 1.7 = -11.05 + 1.7 = -9.35$

3) $4.2 - -6 = 4.2 + 6 = 10.2$

4) $122.5 - (6.3 - 9.5) = 122.5 - 3.2 = 122.5 + 2.3 = 125.7$

5) $3.5 + (5.2 - 8) = 3.5 + (-2.8) = 0.7$

6) $\frac{125 + 7 - 132}{3 - 5 + 8} = \frac{132 - 132}{-2 + 8} = \frac{0}{6} = 0$

7) $8.2 + 3.84 \div 3.2 = 8.2 + 1.2 = 9.4$

8) $\frac{7.5 - 15(3.4 + 2.3)}{116.8 + 6 \times 3.7} = \frac{7.5 - 15 \times 5.7}{116.8 + 22.2} = \frac{7.5 - 85.5}{139} = \frac{-78}{139} = -\frac{78}{139}$

9) $0.81 \div (0.9 \times 0.1) = 0.81 \div 0.09 = 9$

الأسستعريف الأسستعريف 1:

إذا كان لدينا عدد حقيقي a و عدد طبيعي n فسيكون a أس n هو :

$$a^n = a \times a \times a \dots \dots \times a \text{ (مرة } n \text{)}$$

للم الرمز a^n يسمى القوة n للعدد a ويقرأ a أس n أو a مرفوع للقوة n

للم في الرمز a^n العدد a يسمى الأساس و العدد n يسمى الأس.

مثال 9:

احسب كلا مما يلي:

1) $3^2 = \dots$

2) $(-2)^4 = \dots$

3) $(-3)^3 = \dots$

4) $-2^2 = \dots$

5) $5 \times 2^4 = \dots$

$$6) (2 + 3^2)(4^3 - 3^2) = \dots$$

$$7) 2 \times 3^5 - 2^3 + 17 = \dots$$

الحل:

$$1) 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$2) (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

$$3) (-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$$

$$4) -2^2 = -(2^2) = -4$$

$$5) 5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$$

$$6) (2 + 3^2)(4^3 - 3^2) = (2 + 9)(64 - 9) = (11)(55) = 605$$

$$7) 2 \times 3^5 - 2^3 + 17 = 2 \times 243 - 8 + 17 = 486 - 8 + 17 = 478 + 17 = 495$$

تعريف ٢:

إذا كان لدينا عدد حقيقي $a \neq 0$ و عدد طبيعي n فسيكون a^{-n} أس $-n$ هو :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال ١٠:

احسب كلا مما يلي:

$$1) 3^{-2} = \dots$$

$$2) (-2)^{-4} = \dots$$

$$3) (-3)^{-3} = \dots$$

الحل:

$$1) 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$2) (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

$$3) (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$$

قوانين الأسس

إذا كان كل من a و b عددا حقيقيا لا يساوي الصفر، وكان كل من n و m عددا صحيحا فان:

$$1) (a^n)^m = a^{nm}$$

$$2) a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$3) a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$4) (a \times b)^n = a^n b^n$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$6) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$8) a^0 = 1$$

الأسس لا تتوزع على عمليتي الجمع والطرح أي أن:

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$



مثال ١١:

احسب كلا مما يلي:

$$1) (xy)^{-2} = \dots$$

$$2) [(-2)^{-4}]^2 = \dots$$

$$3) \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}} = \dots$$

$$4) 5^2 5^3 = \dots$$

$$5) (-3)^2 (-3)^3 = \dots$$

$$6) \left(\frac{2}{9}\right)^0 = \dots$$

$$7) -5^{-2} = \dots$$

$$8) \left(\frac{2}{9}\right)^{-3} = \dots$$

$$9) \frac{-2^4}{2^5} = \dots$$

$$10) (-3t)^{-2} = \dots$$

$$11) 5(0.1)^{15}(10^{-2} \times 100^4)^3 = \dots$$

$$12) \frac{15(0.001)^{-2} \times 1000^2}{3(0.01)^{-5} \times 10^9} = \dots$$

الحل:

$$1) (xy)^{-2} = \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$2) [(-2)^{-4}]^2 = (-2)^{-8} = \frac{1}{(-2)^8} = \frac{1}{256}$$

$$3) \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}} = (-3)^{-3 - (-4)} = (-3)^1 = -3$$

$$4) 5^25^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$$

$$5) (-3)^2(-3)^3 = (-3)^5 = -243$$

$$6) \left(\frac{2}{9}\right)^0 = 1$$

$$7) -5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25} = -0.04$$

$$8) \left(\frac{2}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8}$$

$$9) \frac{-2^4}{2^5} = -2^{4-5} = -2^{-1} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$10) (-3t)^{-2} = \frac{1}{(-3t)^2} = \frac{1}{(-3)^2t^2} = \frac{1}{9t^2}$$

$$11) 5(0.1)^{15}(10^{-2} \times 100^4)^3 =$$

$$= 5\left(\frac{1}{10}\right)^{15} (10^{-2} \times 100^4)^3 =$$

$$= 5(10)^{-15}(10^{-6} \times 100^{12}) =$$

$$= 5 \times (10)^{-15} \times 10^{-6} \times (10^2)^{12} =$$

$$= 5 \times (10)^{-15} \times 10^{-6} \times 10^{24} =$$

$$= 5 \times 10^{-15-6+24} =$$

$$= 5 \times 10^3 = 5 \times 1000 = 5000$$

$$12) \frac{15(0.001)^{-2} \times 1000^2}{3(0.01)^{-5} \times 10^9} = \frac{15\left(\frac{1}{1000}\right)^{-2} \times 1000^2}{3\left(\frac{1}{100}\right)^{-5} \times 10^9} = \frac{15(10^{-3})^{-2} \times (10^3)^2}{3(10^{-2})^{-5} \times 10^9} = \frac{15 \times 10^6 \times 10^6}{3 \times 10^{10} \times 10^9} =$$

$$= 5 \times 10^{6+6-10-9} = 5 \times 10^{-7} = \frac{5}{10^7}$$

تمارين (٢-١)

تمرين ١:

احسب ما يلي:

1) $\frac{3}{13} + \frac{5}{13} = \dots$

2) $\frac{2}{11} - \frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \dots$

3) $\frac{3}{11} + \frac{2}{3} = \dots$

4) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}} = \dots$

5) $\frac{5}{7} \div \frac{1}{2} + \frac{7}{11} = \dots$

6) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} + \frac{-2}{7} = \dots$

7) $\frac{5}{9} \div \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{15} \right) = \dots$

8) $\left(\frac{2}{17} + \frac{1}{34} \right) \times \frac{2}{5} = \dots$

9) $3 \times \frac{25}{172} = \dots$

10) $7 + \frac{2}{5} = \dots$

11) $35 \div \frac{7}{9} = \dots$

12) $-3 \times \frac{7}{13} + \frac{1}{13} =$

تمرين ٢:

اجر العمليات الحسابية التالية مقربا الأجوبة إلى رقمين عشريين:

1) $17.87 + 25.04 - 23$

2) $111.325 - 122.53 + 13.27$

3) $34.52 - (-18)$

4) $1762.125 - (17.53 - 19.25)$

5) $75.17 + (15.32 - 23)$

6) $\frac{145 + 19 - 147}{3 - 9 + 7}$

7) $27 \div 18 \times 3 \times 3.1$

8) $\frac{9.2 - 13(5.4 + 7.3)}{217.9 + 6 \times 2.3}$

9) $1.781 \div (2.9 \times 0.1)$

10) $114.3 \times 3.2 \div 5.2$

11) $13 \times 7.2 \div 5 \div 3$

12) $2.9 \times 30 \div 5$

تمرين ٣:

بسط ما يلي إلى أبسط صورة مستخدما قوانين الأسس:

1) $\frac{8^{-3} \times (18)^2}{81 \times (16)^{-2}}$

2) $\frac{x^3 y^5 z^{-4}}{y^3 x^{-2} z^2}$

3) $\frac{(4)^{n+1} \times (6)^{1-2n}}{(9)^{1-n}}$

4) $5x^{-3}(6^{-1}x^{-4})^3$

5) $\frac{15x^{-2}y^2}{3x^{-5}y}$

6) $(-9Z^2t^3)^{-2}$

$$7) 2(0.01)^{-2}(3^{-1}10^5)^4$$

$$8) \frac{105(0.01)^{-3} \times 100^2}{300(0.001)^{-4} \times 10^8}$$

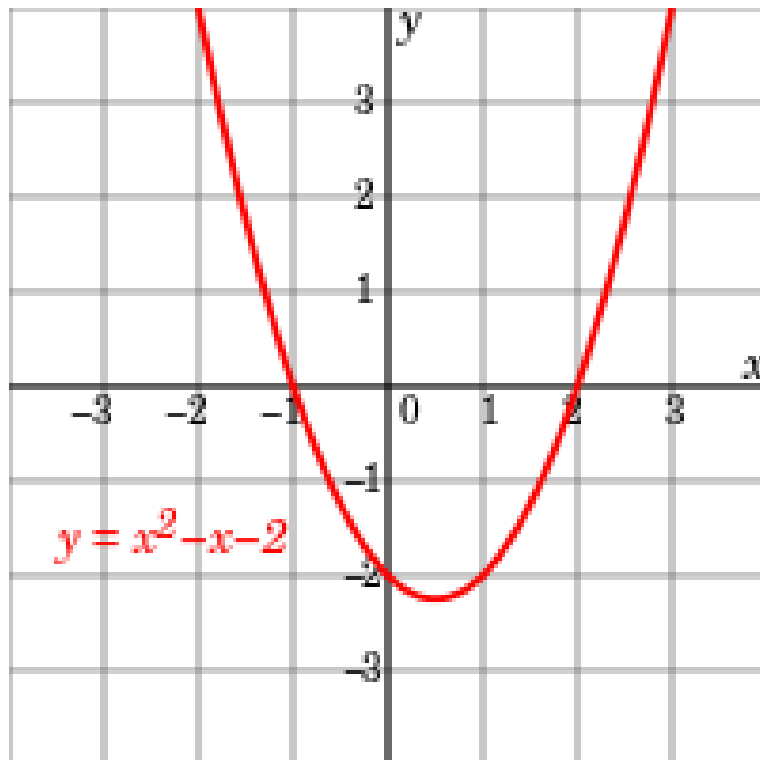
$$9) \frac{75 \times 35 \times 15}{5^2 \times 21 \times 9}$$

$$10) \frac{(125)^{2n} \times (16)^n}{(10)^{4n} \times (25)^{n+1}}$$

$$11) \frac{(9)^n \times (6)^{n+1}}{(2)^{n+3} \times (27)^n}$$

$$12) \left(\frac{2x}{y}\right)^3 \left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^1 \left(\frac{y^4}{x^3}\right)^2$$

الباب الثاني: كثيرات الحدود



الهدف العام:

معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها.

الأهداف التفصيلية:

بعد دراسة هذا الباب يتمكن الطالب من:

١. إجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود.
٢. تحليل كثيرات الحدود.
٣. حساب الكسور الجبرية واختصارها.

تعريف كثيرات الحدود Polynomial

تعريف ١:

يكون الحد الجبري إما ثابتاً أو متغيراً، أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عدداً صحيحاً غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري، وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال ١:

معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي $2 + 1 = 3$

تعريف ٢:

الحدود المتشابهة هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس) فمثلاً $12x^2$ و $9x^2 -$ حدان متشابهان ولكن الحدود $2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة.

درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر ($2x^0 = 2$)



تعريف ٣:

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهي من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها. الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x هو كالتالي:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد غير سالب .
المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت .

مثال ٢:

الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود الثلاثة:

المعامل الرئيسي	المعاملات	الدرجة	الحدود	كثيرة الحدود
9	9, -1, 5	2	$9x^2, -x, 5$	$9x^2 - x + 5$
2-	2, 11-	1	$-2x, 11$	$11 - 2x$
1	1, 5, -3	3	$x^3, 5x, -3$	$x^3 + 5x - 3$

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود.

جمع وطرح كثيرات الحدود

نقوم بجمع أو طرح الحدود المتشابهة فقط كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٣:

اختصر ما يلي:

$$1) (3x^2 + 6x - 4) + (4x^2 - 5x + 3)$$

$$2) (x^2 - 5x + 7) - (2x^2 + 3x - 2)$$

الحل

$$1) (3x^2 + 6x - 4) + (4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 + 6x - 4 + 4x^2 - 5x + 3 =$$

$$= (3x^2 + 4x^2) + (6x - 5x) + (-4 + 3) = 7x^2 + x - 1$$

$$2) (x^2 - 5x + 7) - (2x^2 + 3x - 2) = x^2 - 5x + 7 - 2x^2 - 3x + 2 =$$

$$= (x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (7 + 2) = -x^2 - 8x + 9$$

ضرب كثيرات الحدود

تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني وهكذا.

مثال ٤:

احسب واختصر ما يلي:

$$(2x - 3)(3x^2 - x + 1) =$$

الحل:

$$(2x - 3)(3x^2 - x + 1) =$$

$$= (2x)(3x^2) + (2x)(-x) + (2x)(1) + (-3)(3x^2) + (-3)(-x) + (-3)(1) =$$

$$= 6x^3 - 2x^2 + 2x - 9x^2 + 3x - 3 = 6x^3 - 11x^2 + 5x - 3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$1) (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$2) (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$3) (x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$4) (x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$5) (x - y)^3 = (x - y)(x - y)(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

مثال ٥:

أوجد حاصل الضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

$$1) (7x + 10)(7x - 10)$$

$$2) (2y^2 + 11z^2)^2$$

$$3) (2x - 3y)^3$$

الحل:

$$1) (7x + 10)(7x - 10) = (7x)^2 - (10)^2 = 49x^2 - 100$$

$$2) (2y^2 + 11z^2)^2 = (2y^2)^2 + 2(2y^2)(11z^2) + (11z^2)^2 =$$

$$= 4y^4 + 44y^2z^2 + 121z^4$$

$$3) (2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3 =$$

$$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

تعريف ٤: قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المستعملة في الأعداد الصحيحة.

مثال ٦:

أوجد خارج قسمة $(x^2 + 9x - 16)$ على $(x - 3)$

الحل

نتبع طريقة القسمة المطولة فيكون خارج قسمة

$(x^2 + 9x - 16)$ على $(x - 3)$ هو $x + 12$ و باقي القسمة هو 20 و بالتالي يكون لدينا :

	$x + 12$
$x - 3$	$x^2 + 9x - 16$
—	$x^2 - 3x$
	$12x - 16$
—	$12x - 36$
	20

$$(x^2 + 9x - 16) \div (x - 3) =$$

$$= (x + 12) + \frac{20}{x - 3}$$

تمارين (١-٢)

تمرين ١:

اذكر الحدود والمعاملات والدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

1) $x^2 + 2x - 7$

2) $\sqrt{2}$

3) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 17xy^3$

4) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5$

5) $x^3 - 1$

6) $-9x^5y + 10xy^4 - 11x^2y^2$

تمرين ٢:

احسب واختصر ما يلي:

1) $(3x^2 + 4x + 5) + (2x^2 + 7x - 2)$

2) $(4w^2 - 2w + 7) + (5w^3 + 8w^2 - 1)$

3) $(4s^2 - 4s + 11) - (-2s^2 + 11s - 9)$

4) $(u^3 - 3u^2 - 4u + 8) - (u^2 - 2u + 4)$

5) $(5x - 7)(3x^2 - 8x - 5)$

6) $(3x^2 - 2x + 5)(2x^2 - 5x + 2)$

7) $(3c - 2)(4c + 1)(5c - 2)$

8) $(4u - 5)(2u - 1)(3u - 4)$

تمرين ٣:

استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

1) $(3x + 5)(3x - 5)$

2) $(4x^2 - 3y)(4x^2 + 3y)$

3) $(3x^2 - y)^2$

4) $(4w + z)^2$

5) $[(x - 2) + y]^2$

6) $[(x + 3) - y]^2$

7) $[(x + 5) + y][(x + 5) - y]$

8) $[(x - 2y) + 7][(x - 2y) - 7]$

9) $(x - 1)^3$

10) $(2x + y)^3$

11) $[(x - 1) + 2y]^3$

12) $[4 - (1 - 2y)]^3$

تمرين ٤:

باستخدام طريقة القسمة المطولة أوجد ناتج ما يلي:

1) $(20x^3 + 2x^2 + 3x + 20) \div (x + 3)$

2) $(6x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 2x - 9) \div (2x - 3)$

3) $(2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45) \div (2x^2 - x - 5)$

4) $(24x^5 + 20x^3 - 18x^2 - 15) \div (6x^2 + 5)$

تحليل كثيرات الحدود

تعريف ٥:

عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلاً، وعملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات. وسنتطرق في هذا الباب إلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة فقط.

طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م.)

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكناً كما هو موضح في المثال التالي.

مثال ٧:

حل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$$1) 10x^3 + 6x$$

$$2) 12x^2y - 6xy - 30xy^2$$

$$3) (x - 4)(2a - b) + (x + 4)(2a - b)$$

الحل:

١. نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م.) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3 + 6x = 2x(5x^2 + 3)$$

٢. نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م.) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$12x^2y - 6xy - 30xy^2 = 6xy(2x - 1 - 5y)$$

٣. هنا نلاحظ أن (أ.ع.م.) هو كثيرة الحدود $(2a - b)$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$(x - 4)(2a - b) + (x + 4)(2a - b) = (2a - b)[(x - 4) + (x + 4)] =$$

$$= (2a - b)(x - 4 + x + 4) = (2a - b)(2x) = 2x(2a - b)$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بإيجاد أكبر عامل مشترك بين بعض الحدود أي بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي.



مثال ٨:

حل كثيرة الحدود التالية :

$$6y^3 - 21y^2 - 4y + 14$$

الحل:

نقوم أولاً بتجميع الحدين الأولين وتجميع الأخيرين كالتالي:

$$6y^3 - 21y^2 - 4y + 14 = (6y^3 - 21y^2) - (4y - 14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3 - 21y^2 - 4y + 14 = (6y^3 - 21y^2) - (4y - 14)$$

$$= 3y^2(2y - 7) - 2(2y - 7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $(2y - 7)$ أصبح عاملاً مشتركاً بين المجموعتين , فاذن يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3 - 21y^2 - 4y + 14 = (6y^3 - 21y^2) - (4y - 14)$$

$$= 3y^2(2y - 7) - 2(2y - 7) = (2y - 7)(3y^2 - 2)$$

طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c

$$ax^2 + bx + c$$

الحالة الأولى : $a = 1$ في هذه الحالة نبحث عن عددين صحيحين m, n تحقق الشرطين التاليين :

$$1) mn = c$$

$$2) m + n = b$$

أي أن حاصل ضربهما يساوي المعامل الثابت c وجمعهما الجبري يساوي b .
وعندئذ يكون التحليل كما يلي:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

مع الملاحظة أن إشارة m و n تكون نفس إشارة b إذا كان $c > 0$ ومختلفتان إذا كان $c < 0$.**مثال ٩:**

حل كثيرة الحدود التالية:

$$x^2 + 7x - 18$$

الحل:

في هذه الحالة $b = 7$ و $c = -18$ اذن يالبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -18 و جمعهما الجبري يساوي 7 فالعددين حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن:
 $7 = (-2) + 9$ و $-18 = (-2) \times 9$ وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$$x^2 + 7x - 18 = (x - 2)(x + 9)$$

يمكن التأكد من الحل بفك الأقواس

**الحالة الثانية: $a \neq 1$**

في هذه الحالة نبحث عن أربع أعداد صحيحة m, n, p, q تحقق الشروط الثلاثة التالية:

$$1) mn = a$$

$$2) pq = c$$

$$3) mq + np = b$$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

يتم اختيار m و n على أساس الشرط (1) و يتم اختيار p و q على أساس الشرط (2) ثم نستخدم الشرط (3) للتأكد من صحة الأعداد m, n, p, q .

مثال ١٠:

حل كثيرة الحدود التالية:

$$6x^2 + 11x + 3$$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m, n, p, q حيث:

$$1) mn = a = 6$$

$$2) pq = c = 3$$

$$3) mq + np = b = 11$$

بطريقة التجربة والخطأ نجد أن:

$$m = 2, \quad n = 3, \quad p = 3, \quad q = 1$$

إذن يكون التحليل كما يلي:

$$6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$$

ملحوظة:

١. حتى يكون $ax^2 + bx + c$ قابلاً للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة

$b^2 - 4ac$ مربعاً كاملاً. فمثلاً $6x^2 - 5x - 4$ قابل للتحليل بمعاملات صحيحة لأن:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6)(-4) = 121 = 11^2$$

$$6x^2 - 5x - 4 = (3x - 4)(2x + 1)$$

٢. إذا كان $m = n$ و $p = q$ فنقول أن $ax^2 + bx + c$ هو مربع كامل و تحليله يكون كالآتي

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)^2$$

فمثلاً $9x^2 + 12x + 4$ هو مربع كامل و تحليله يكون كما يلي:

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

طريقة تحليل فرق ما بين مربعين

في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذا الباب وهي:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

مثال ١١:

حلل

$$49x^2 - 144$$

الحل:

$$49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2 = (7x + 12)(7x - 12)$$

تمارين (٢-٢)

تمرين ١:

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

<p>تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 9x + 20$ هو</p> <p>a) $(x + 10)(x + 2)$</p> <p>b) $(x + 5)(x + 4)$</p> <p>c) $(x - 5)(x - 4)$</p> <p>d) $(x + 10)(x + 10)$</p>	١
<p>تحليل كثيرة الحدود $x^2 + 7x + 6$ هو</p> <p>a) $(x + 3)(x + 2)$</p> <p>b) $(x - 5)(x - 2)$</p> <p>c) $(x + 6)(x + 1)$</p> <p>d) $(x - 1)(x - 6)$</p>	٢
<p>تحليل كثيرة الحدود $x^2 + 2x - 24$ هو</p> <p>a) $(x + 4)(x + 6)$</p> <p>b) $(x - 4)(x + 6)$</p> <p>c) $(x - 8)(x + 3)$</p> <p>d) $(x + 6)(x - 5)$</p>	٣
<p>تحليل كثيرة الحدود $6x^4 + 14x^3 - 12x^2$ هو</p> <p>a) $2x^2(3x^2 + 7x - 6)$</p> <p>b) $2(3x^2 + 7x - 6)$</p> <p>c) $(x + 3)(x^2 + 2)$</p> <p>d) $(7x + 3)(2x + 4)$</p>	٤

<p>تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 36$ هو</p> <p>a) $(x + 36)(x - 36)$</p> <p>b) $(x + 6)(x - 6)$</p> <p>c) $(x + 4)(x^2 - 9)$</p> <p>d) $(x^2 + 6)(x^2 - 6)$</p>	o
--	---

تمرين ٢:

حلل كلا مما يلي باستخدام الطريقة المناسبة:

1) $-15x^2 - 12x$

12) $8a^2 - 26a + 15$

2) $6a^3b^2 - 12a^2b + 72ab^3$

13) $x^2 - 9$

3) $x(y - 3) - 5(3 - y)$

14) $6x^2 - 23x + 20$

4) $(x - 4)(m + 2n) + n(x - 4)$

15) $x^4 - 11x^2 + 18$

5) $3x^3 + x^2 + 6x + 2$

16) $9x^4 - 10x^2 + 1$

6) $2x^2 - 2xy + x - y$

17) $x^4 - 9$

7) $10z^3 - 15z^2 - 4z + 6$

18) $81b^2 - 16c^2$

8) $6m^3 + 4m^2 - 15m - 10$

19) $16y^4 - 256$

9) $6x^4 + 23x^2 + 15$

20) $1 - 121n^2$

10) $x^2 + 9x + 20$

21) $x^2 - (y + z)^2$

11) $b^2 + 12b - 28$

الكسور الجبرية (العبارات النسبية)

تعريف ٦:

كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيرتي حدود.

ملاحظة تعتبر $\frac{3x+1}{2x-5}$ و $\frac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسور جبرية حيث أن مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر، لأن القسمة في هذه الحالة تكون غير معرفة. ويتم إيجاده بعد عملية التحليل.

مثال ١٢:

أوجد مجال الكسر الجبري

$$\frac{2x}{x^2-3x}$$

الحل:

مجال تعريف الكسر الجبري $\frac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x = 3$ و $x = 0$ لأن قيم المقام عند هذه النقاط تساوي الصفر.

$$\text{حيث أن : } x \neq 0; x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad \frac{2x}{x^2-3x} = \frac{2x}{x(x-3)}$$

خصائص الكسور الجبرية

$$1) \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Leftrightarrow PS = QR$$

$$2) \frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}, R \neq 0$$

$$3) -\frac{P}{Q} = \frac{-P}{Q} = \frac{P}{-Q}$$

$$4) \frac{P}{Q} \pm \frac{R}{Q} = \frac{P \pm R}{Q}$$

$$5) \frac{P_1}{Q_1} \pm \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \times Q_2 \pm P_2 \times Q_1}{Q_1 \times Q_2}$$

$$6) \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

$$7) \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR}, R \neq 0$$

اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هي حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذن عملية الاختصار تتطلب منا الإدراك الجيد بعمليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال ١٣:

اختصر ما يلي:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$$

الحل:

أولا نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقا كالتالي:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 2}$$

مثال ١٤:

اختصر كلا مما يلي:

$$1) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} \times \frac{x - 1}{x - 2}$$

$$2) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 + 7x + 12}{x(x^2 + x - 12)}$$

الحل:

$$1) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} \times \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 1)} \times \frac{x - 1}{x - 2} =$$

$$= \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}, \quad x \neq -2; \quad x \neq 2; \quad x \neq 1$$

$$2) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 + 7x + 12}{x(x^2 + x - 12)} = \frac{(x + 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} \div \frac{(x + 4)(x + 3)}{x(x + 4)(x - 3)} =$$

$$= \frac{(x + 3)}{(x - 3)} \div \frac{(x + 3)}{x(x - 3)} = \frac{(x + 3)}{(x - 3)} \times \frac{x(x - 3)}{(x + 3)} = x, \quad x \neq -3; \quad x \neq 3; \quad x \neq -4$$

مثال ١٥:

احسب واختصر ما يلي:

$$1) \frac{2mn + m}{m + n} - \frac{mn + m}{m + n}$$

$$2) \frac{x}{x + 1} + \frac{3}{2x - 1}$$

$$3) \frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 3x - 10}$$

الحل:

بعد تحليل المقام " إذا كان ذلك ممكنا " يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1) \frac{2mn + m}{(m + n)} - \frac{mn + m}{(m + n)} = \frac{2mn + m - (mn + m)}{(m + n)} = \frac{2mn + m - mn - m}{(m + n)} = \frac{mn}{m + n}$$

$$2) \frac{x}{(x + 1)} + \frac{3}{(2x - 1)} = \frac{x(2x - 1) + 3(x + 1)}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{2x^2 - x + 3x + 3}{(x + 1)(2x - 1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 3}{(x + 1)(2x - 1)}$$

$$3) \frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 5)} =$$

$$= \frac{x(x - 5) - (x - 2)(2x - 1)}{(x + 2)(x - 5)(x - 2)} = \frac{x^2 - 5x - (2x^2 - x - 4x + 2)}{(x + 2)(x - 5)(x - 2)} =$$

$$= \frac{x^2 - 5x - 2x^2 + x + 4x - 2}{(x + 2)(x - 5)(x - 2)} = \frac{-x^2 - 2}{(x + 2)(x - 5)(x - 2)}$$

تمارين (٣-٢)

تمرين ١:

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

<p>اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+9x-10}{x^2-100}$ هو</p> <p>a) $\frac{9x}{10}$</p> <p>b) $x + 10$</p> <p>c) $\frac{x-1}{x-10}$</p> <p>d) $\frac{9x-10}{100}$</p>	١
<p>تبسيط الكسر $\frac{10x^3y^2}{2x^5y}$ هو</p> <p>a) $5x^8y^3$</p> <p>b) $\frac{5y}{x^2}$</p> <p>c) $5xy$</p> <p>d) xy</p>	٢
<p>اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+2x}{x+2}$ هو</p> <p>a) $\frac{2x+1}{x}$</p> <p>b) x</p> <p>c) $\frac{x}{2}$</p> <p>d) $\frac{1}{x}$</p>	٣

<p>تبسيط الكسر $\frac{15x^2y^2}{5xy^5}$ هو</p> <p>a) $5x^8y^3$</p> <p>b) $\frac{3x}{y^3}$</p> <p>c) $3xy^3$</p> <p>d) xy</p>	٤
<p>اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2-4}{x+2}$ هو</p> <p>a) $\frac{2x+1}{x}$</p> <p>b) $x-2$</p> <p>c) $\frac{x}{2}$</p> <p>d) $\frac{1}{x}$</p>	٥

تمرين ٢:

اختصر الكسور الجبرية التالية:

1) $\frac{x^2 - 4}{(x - 2)}$

2) $\frac{x^2 - x - 20}{3x - 15}$

3) $\frac{x^3 - 9x}{x^3 + x^2 - 6x}$

4) $\frac{a^4 - 16}{a^2 - 4}$

5) $\frac{x^2 + 3x - 40}{-x^2 + 3x + 10}$

6) $\frac{10x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 5x - 3}$

$$7) \frac{2x^3 - 6x^2 + 5x - 15}{9 - x^2}$$

$$8) \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 - 1}$$

تمرين ٣:

احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1) \frac{x^2 + x}{2x + 3} \times \frac{3x^2 + 19x + 28}{x^2 + 5x + 4}$$

$$2) \frac{x^2 - 16}{x^2 + 7x + 12} \times \frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 4x}$$

$$3) \frac{12m^2 + 28m + 15}{6m^2 + 35m + 25} \times \frac{2m^2 - m - 3}{3m^2 + 11m - 20}$$

$$4) \frac{6u^2 - 5u + 1}{3u^2 + 11u - 4} \div \frac{2u^2 + 3u - 2}{u^2 + 3u - 4}$$

$$5) \frac{z^2 - 81}{z^2 - 16} \div \frac{z^2 - z - 20}{z^2 + 5z - 36}$$

$$6) \frac{2a^2 - 5a + 3}{a^2 + a - 2} \div \frac{3a^2 - 8a - 3}{a^2 - a - 6}$$

تمرين ٤:

احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1) \frac{9x + 1}{2x - 1} - \frac{3x + 4}{2x - 1}$$

$$2) \frac{x + 1}{2x + 3} + \frac{2x - 1}{2x - 3}$$

$$3) \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{3x - 1}{x^2 + 7x + 12}$$

$$4) \frac{1}{x} + \frac{2}{3x - 1} \times \frac{3x^2 + 11x - 4}{x - 5}$$

$$5) \frac{x + 1}{x - 3} - \frac{2x}{x - 3} \div \frac{x + 5}{x - 3}$$

$$6) \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(3 - \frac{1}{x}\right)$$

تمرين ٥:

احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1) \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+1} + \frac{4}{4x+1}$$


$$2) \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x^2-16}$$

$$3) \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{5}{x^2+3x-10}$$

$$4) \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2x}{x+2} - \frac{2x-1}{x^2-4}$$

الباب الثالث: المعادلات

$x + 3 = 5$



$x + 3 = 5$

Take off 3

$x = 2$

الهدف العام:

معرفة المعادلات والقدرة على حلها

الأهداف التفصيلية:

بعد دراسة هذا الباب يتمكن الطالب من:

- ✓ حل المعادلات من الدرجة الأولى.
- ✓ حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد.
- ✓ حل المعادلات الخطية ذات مجهولين.

مقدمة:

درس المصريون والبابليون المعادلات منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمد الخوارزمي في كتابه " الجبر والمقابلة " في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م)، وهو المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر، وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية. وتكمن أهمية المعادلات في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات.

تعريف المعادلات Equations

تعريف ١:

المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيرتي حدود)، وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثل

المعادلة $2x + 1 = 7$ تكون صحيحة عندما $x = 3$ و خاطئة لأي قيمة أخرى لـ x .

إذن نقول أن $x = 3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3

تصبح المعادلة $2(3) + 1 = 7$ وهذا صحيح .

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تحقق صحة المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول، و تتم عملية حل معادلة في متغير x

بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل:

$x = \text{constant}$ (ثابت)

لإيجاد هذه المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية:

للمختصر العبارات في طرفي المعادلة أما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل الخاصية التبادلية، التجميعية، والتوزيعية:

معادلتان متكافئتان

$$2x + 3 + 5x = -11 \quad \text{و} \quad 7x + 3 = -11$$

للمطرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة:

معادلتان متكافئتان

$$3x - 7 = 2 \quad \text{و} \quad 3x = 9$$

للمضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط ألا يكون هذا العدد يساوي صفراً:

معادلتان متكافئتان

$$\frac{5}{6}x = 10 \quad \text{و} \quad x = 12$$

تعريف ٢: درجة المعادلة:

١. يقال أن المعادلة من الدرجة الأولى إذا كان أكبر أس في أي حد منها = ١

مثل:

$$5x - 7 = 0$$

$$2x + y = 7$$

٢. يقال أن المعادلة من الدرجة الثانية إذا كان أكبر أس في أي حد منها = ٢

مثل:

$$x^2 + 3xy - 40 = 0$$

تعريف ٣: عدد المجاهيل في المعادلة:

١. يقال أن المعادلة ذات مجهول واحد أن لم يكن هناك سوى قيمة واحدة مجهولة

مثل:

لمجهول x

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

المجهول y

$$y^2 - 5y - 12 = 17$$

٢. تكون المعادلة ذات مجهولين إذا كان هناك قيمتان مجهولتان.

مثل:

المجهولان x, y

$$5x^2 + 12xy + y^2 = 0$$

المجهولان x, y

$$9x - 7y = 4$$

أنواع المعادلات

تنقسم المعادلات النوعين:

النوع الأول: المعادلات الصحيحة هي المعادلات التي يكون المتغير (أي المجهول) موجود في البسط فقط.

النوع الثاني: المعادلات الكسرية هي المعادلات التي يكون المتغير (أي المجهول) موجود في البسط والمقام.

حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

تعريف ٢:

معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$ax + b = 0 \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان و } a \neq 0$$

مثال ١:

حل المعادلات الصحيحة التالية:

$$1) 2x + 5 = 9$$

$$2) \frac{3}{4}x - 6 = 0$$

$$3) (x + 2)(5x + 1) = 5x(x + 1)$$

الحل:

١. يتم حل هذه المعادلة بطرح 5 من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على 2:

$$2x + 5 - 5 = 9 - 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

٢. هنا نضيف 6 إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ للتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}x - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x - 6 + 6 = 0 + 6 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right) = \left(\frac{4}{3}\right)(6) \Leftrightarrow x = 8$$

٣. نقوم أولاً بفك الأقواس:

$$(x + 2)(5x + 1) = 5x(x + 1)$$

$$5x^2 + x + 10x + 2 = 5x^2 + 5x$$

$$5x^2 + 11x + 2 = 5x^2 + 5x$$

ثم نطرح على التوالي 2، 5x، 5x² من طرفي المعادلة :

$$6x + 2 = 0$$

$$6x = -2$$

بقسمة طرفي المعادلة على 6:

$$x = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.



في حالة المعادلة الكسرية أي وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام، وإذا كانت قيمة الحل للمعادلة تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال ٢:

حل المعادلات الكسرية التالية:

$$1) \frac{x}{x-3} = \frac{24-5x}{x-3}$$

$$2) 1 + \frac{x}{x-5} = \frac{5}{x-5}$$

الحل:

١. أولاً يجب أن يكون $x \neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفراً , ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x - 3)$ لتنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً .

$$(x - 3) \frac{x}{(x - 3)} = \frac{24 - 5x}{(x - 3)} (x - 3)$$

$$x = 24 - 5x$$

$$x + 5x = 24 - 5x + 5x$$

$$6x = 24$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{24}{6}$$

$$x = 4$$

هذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

٢. هنا كذلك يجب أن يكون $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفراً، لتنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x - 5)$ لتنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً.

$$(x - 5) \left(1 + \frac{x}{x - 5}\right) = (x - 5) \left(\frac{5}{x - 5}\right)$$

$$(x - 5) \times 1 + (x - 5) \left(\frac{x}{x - 5}\right) = (x - 5) \left(\frac{5}{x - 5}\right)$$

$$x - 5 + x = 5$$

$$2x - 5 = 5$$

$$2x - 5 + 5 = 5 + 5$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفراً فإذن الحل $x = 5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول إن المعادلة الأصلية ليس لها حل.

تمارين (١-٣)

حل المعادلات الآتية وتأكد من الحل

1) $2x + 10 = 40$

2) $-3y + 20 = 2$

3) $4x - 11 = 7x + 22$

4) $4(2x - 17) + 5(3x - 8) = 0$

5) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

6) $\frac{1}{2}x + 7 - \frac{1}{4}x = \frac{19}{2}$

7) $5(x + 3)(x - 3) = 5x(x - 1)$

8) $\frac{40 + 30x}{5} = \frac{6x + 7}{8}$

9) $\frac{3}{x + 2} = \frac{5}{2x - 7}$

10) $\frac{x}{x - 3} = \frac{x + 4}{x + 2}$

المعادلات الخطية

تعريف المعادلات الخطية:

تعريف ١:

تعبير خطي لمتغيرات ما، هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثل

هذه تعبيرات خطية للمتغيرات x, y, z الموجودة فيها :

$$1) -x + 2.5y + 3z$$

$$2) y + \sqrt{3}x - 2y + z$$

$$3) 2x - y + 3z$$

وهذه تعبيرات غير خطية للمتغيرات x, y, z الموجودة فيها :

$$1) x + xy - z$$

$$2) x^2 + x + 1$$

$$3) \sqrt{x} + y + 3z$$

تعريف ٢:

معادلة خطية لمجاهيل معينة، هي معادلة تحتوي على تعبيرات خطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثل

هذه معادلات خطية للمجاهيل x, y, z الموجودة فيها :

$$1) -x + 2.5y + 3x - 6 = z - 2y + 3$$

$$2) 2x - y + 3z = -2$$

$$3) x + 3.5y = 6$$

و هذه معادلات غير خطية للمجاهيل x, y, z الموجودة فيها :

$$1) x + xy - z = 0$$

$$2) x^2 + x + 1 = 3$$

$$3) \sqrt{x} + y + z = -y + z + 10$$

تعريف ٣:

جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت. لا نحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثل

هذه جملة 3 معادلات خطية للمجاهيل x, y, z :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 2 \\ 3x - 6y + z = -3 \\ 2x + y - 5z = 10 \end{cases}$$

تعريف ٤:

حل جملة معادلات خطية هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعنية. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى:

جملة المعادلات الخطية تقبل حلا وحيدا، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعنية.

الحالة الثانية:

جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعنية.

الحالة الثالثة:

جملة المعادلات الخطية لها عدد لا نهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لا نهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعنية (أي عندما لا تكون الحالتين الأولى).

المعادلات الخطية ذات مجهول واحد**مثال ٣:**

حل كل من المعادلات الخطية التالية:

1) $-x + 3 = 2x - 6$

2) $3x + 4 = 6x - 3 - 3x$

3) $2(3 - x) = -2x + 6$

الحل:

$$1) -x + 3 = 2x - 6$$

الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x - 2x = -6 - 3$$

الخطوة الثانية: نبسط الطرفين:

$$-3x = -9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة

المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$2) 3x + 4 = 6x - 3 - 3x$$

الخطوة الأولى:

$$3x - 6x + 3x = -3 - 4$$

الخطوة الثانية:

$$0 = -7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

$$3) 2(3 - x) = -2x + 6$$

الخطوة الأولى:

$$6 - 2x = -2x + 6$$

$$-2x + 2x = 6 - 6$$

الخطوة الثانية:

$$0 = 0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عددا لا نهائيا من الحلول.

جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

الحل بطريقة التعويض

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى، فنحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

- الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد، فإن للجملة حلا وحيدا نحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.
- الحالة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل، فإن الجملة مستحيلة الحل.
- الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول، فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٤:

حل كل من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 3x - 4y = -25 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = -2.5 \end{cases}$$

الحل:إجابة رقم ١:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x - 4(5 + 2x) = -25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x - 20 - 8x = -25$$

$$3x - 8x = -25 + 20$$

$$-5x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-5} = 1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة، إذن للجملة حل وحيد نحصل عليه بالتعويض:

$$y = 5 + 2x$$

$$y = 5 + (2 \times 1) = 7$$

الخلاصة: حل الجملة هو

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$$

إجابة رقم ٢:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = 2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = 2$$

$$x - x = 2 + 2.5$$

$$0 = 4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

إجابة رقم ٣:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى :

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = -2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = -2.5$$

$$x - x = -2.5 + 2.5$$

$$0 = 0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول إذن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

الحل بطريقة كرامر

تعريف ٥:

لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

بحيث أن المعاملات a_1, a_2, b_1, b_2 و الثوابت c_1, c_2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد و كل صف متكون معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، ويمكن فكه عن طريق ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد)، أي أن:



$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

نظرية ١: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$X = \frac{D_x}{D}$$

$$Y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عددا لا نهائيا من الحلول.

مثال ٥:

أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال السابق بطريقة كرامر:

الحل:**إجابة رقم ١:**

نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = -20 - (-25) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = 50 - 15 = 35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر، إذن للجملة حل وحيد هو:

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1 \quad Y = \frac{D_y}{D} = \frac{35}{5} = 7$$

إجابة رقم ٢:

نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5 - 2 = 4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر، ومحدد X لا يساوي الصفر، إذن للجملة مستحيلة الحل.

إجابة رقم ٣:

نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2.5 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5 - (-2.5) = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2.5 \end{vmatrix} = 5 - 5 = 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عددا لا نهائيا من الحلول.

مثال ٦:

حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = -3 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$$

الحل:

$$1) D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - (-9) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$$

إن للجملة حل وحيد هو:

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{-5} = -1 \quad Y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$2) D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -36 - 2 = -38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 60 = -57$$

إن للجملة حل وحيد هو:

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{-38}{-19} = 2 \quad Y = \frac{D_y}{D} = \frac{-57}{-19} = 3$$

$$3) D = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 112 = -96 \neq 0$$

إن للجملة مستحيلة الحل.

تمارين (٢-٣)

تمارين ١: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

1) $2(x + 1) - 3x = x - 3(x - 1)$

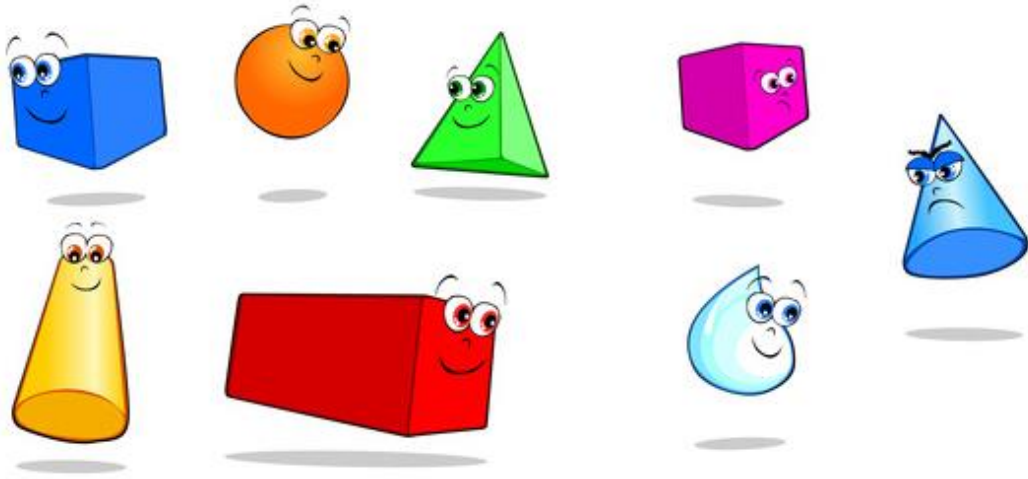
2) $(x - 1)^2 + 2x - 2 = (x + 1)(x + 2)$

تمارين ٢: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} 4x + 2y = -8 \\ -x - 0.5y = 2 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 5y = 9 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$, 5) $\begin{cases} 4x - 5y = -9 \\ -8x + 10y = 18 \end{cases}$, 6) $\begin{cases} 4x - 5y = -9 \\ -2x + 2.5y = 0 \end{cases}$

الباب الرابع: المساحات والحجوم



أهداف الباب

١. أن يميز الطالب بين مفهومي الحجم والمساحة.
٢. أن يدرك الطالب أهمية إيجاد المساحات والحجوم في حياتنا العملية.
٣. أن يتعرف الطالب على أهم خواص الأشكال الهندسية.
٤. أن يكون الطالب قادرا على إيجاد مساحات أسطح المثلث ومتوازي الأضلاع والمعين والمستطيل والمربع وشبه المنحرف والدائرة.
٥. أن يكون الطالب قادرا على إيجاد مساحات أسطح وحجوم المنشور القائم وحالاته الخاصة (متوازي المستطيلات والمكعب)، والأسطوانة والكرة.

مقدمة

حساب مساحات أسطح الأشكال الهندسية وإيجاد حجوم المجسمات من أهم المهارات التي يجب أن يتقنها الإنسان فهي تستخدم في مجالات لا حصر لها. فإيجاد المساحة الجانبية لأسطوانة تعطي فكرة عن مساحة الخامة السطحية اللازمة لعمل هذه الأسطوانة، وحساب المساحات يستخدم بكثرة في جميع عمليات أعمال الصاج. كذلك يفيد حساب المساحات والحجوم في المقاييس الخاصة بالخراطة، وماكينات الورش، واللحام، وأعمال الألوميتال لحساب كمية الخامات، ونوعيتها اللازمة لإتمام العمل. كما تستخدم لمعرفة مساحة مقطع الأسلاك والموصلات في مجال الكهرباء والطاقة. وهي لازمة أيضا لحساب كتل وأوزان الخامات أو السوائل داخل الخزانات عن طريق ضرب الحجم في كثافة المادة. كما أن حساب السعة (الحجم الداخلي) للغرف لازم لفني التبريد والتكييف لاختبار الأجهزة المناسبة لتصميم غرف التبريد أو تركيب التكييف المنزلي.

الهندسة المستوية

الأشكال الهندسية المستوية المشهورة تنقسم إلى قسمين هما:

المضلعات

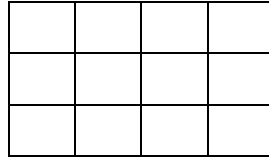
الدائرة

الأشكال الرباعية:

الشكل الرباعي هو كل شكل مضلع له أربعة أضلاع ومن أنواعه:
متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمعين، وشبه المنحرف.

تعريف

مساحة سطح الشكل الهندسي: هو عدد ما يحويه الشكل من وحدات مربعة.

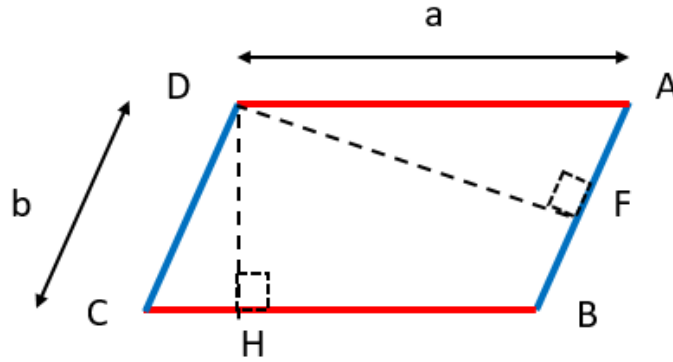


الشكل السابق مساحته 12 وحدة مربعة.

للوحدة قياس المساحة تساوي (وحدة الطول)² مثل : mm^2 , cm^2 , m^2 , km^2

متوازي الأضلاع Parallelogram

هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.



ومن خواصه:

- للوحدة كل ضلعين متقابلين متطابقان.
- للوحدة كل زاويتين متقابلتين متساويتان.
- للوحدة القطران ينصف كل منهما الآخر.

محيط متوازي الأضلاع (P):

محيط متوازي الأضلاع يساوي

$$P = 2(a + b)$$

حيث a , b طولي ضلعين متجاورين

وبشكل عام فإن محيط أي شكل هندسي يساوي مجموع أطوال أضلاعه.

مساحة متوازي الأضلاع (A):

مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول القاعدة مضروباً في طول الارتفاع الساقط على هذه القاعدة.

$$A = b \times h$$

حيث: b طول القاعدة

h طول الارتفاع الساقط على هذه القاعدة

قاعدة متوازي الأضلاع هي أي ضلع من أضلاعه الأربعة.

ارتفاع متوازي الأضلاع هو العمود النازل من أي رأس من رؤوسه على الضلع المقابل لهذا الرأس.

القاعدة الصغرى يقابلها الارتفاع الأكبر والقاعدة الكبرى يقابلها الارتفاع الأصغر



مثال ١:

متوازي أضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 8 cm ، 14 cm أحسب محيطه ومساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر 5 cm

الحل:

المحيط $P = 2 \times (a + b)$ و منه

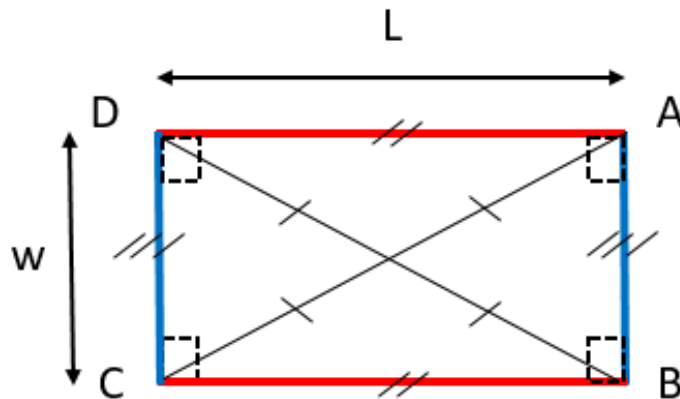
$$P = 2 \times (8 + 14) = 44\text{ cm}$$

المساحة: $A = b \times h$

$$A = 14 \times 5 = 70\text{ cm}^2$$

المستطيل Rectangle

هو شكل رباعي جميع زوايا قائمة.



المحيط (P) :

محيط المستطيل يساوي (الطول + العرض) $\times 2$
حيث الطول (l) , العرض (w)

$$P = 2 \times (l + w)$$

المساحة (A) :

مساحة المستطيل تساوي الطول \times العرض

$$A = l \times w$$

مثال ٢ :

مستطيل طوله $l = 17 \text{ cm}$ و عرضه $w = 11 \text{ cm}$ أحسب كل من محيطه و مساحته

الحل:

$$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (17 + 11) = 2 \times 28 = 56 \text{ cm} \quad \text{المحيط :}$$

$$A = l \times w = 17 \times 11 = 187 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة :}$$

مثال ٣ :

مستطيل مساحته $A = 320 \text{ cm}^2$, فإذا كان عرضه $w = 16 \text{ cm}$ أحسب محيطه.

الحل:

$$\therefore A = l \times w$$

$$\therefore l = \frac{A}{w} = \frac{320}{16} = 20 \text{ cm}$$

ومنه المحيط (P)

$$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (16 + 20) = 2 \times 36 = 72 \text{ cm}$$

مثال ٤ :

مستطيل عرضه $w = 7 \text{ cm}$ و طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه، أحسب كل من محيطه و مساحته.

الحل:

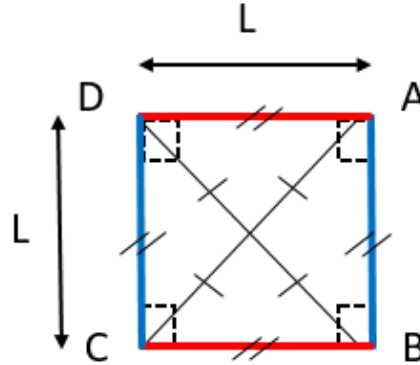
بما أن طول المستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه , إذن طوله $(l) = 3 \times 7 = 21 \text{ cm}$

$$P = 2 \times (l + w) = 2 \times (21 + 7) = 2 \times 28 = 56 \text{ cm} \quad \text{المحيط :}$$

$$A = l \times w = 21 \times 7 = 147 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة :}$$

المربع Square

هو مستطيل جميع أضلاعه متساوية.

محيط المربع (P) :

$$P = 4 \times (L) = 4l$$

حيث (l) طول الضلعمساحة المربع (A) :طول الضلع (l) \times نفسه = A

$$A = (l) \times (l) = l^2$$

مثال ٥:مربع طول ضلعه $l = 9 \text{ cm}$ أحسب كل من محيطه و مساحتهالحل:

$$P = 4l = 4 \times 9 = 36 \text{ cm} \quad \text{المحيط :}$$

$$A = (l) \times (l) = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة :}$$

مثال ٦:مربع محيطه $P = 48 \text{ cm}$ أحسب مساحته .الحل:

$$P = 4l \quad \text{:: المحيط :}$$

$$l = \frac{P}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm} \quad \text{:: طول ضلع المربع :}$$

$$A = (l) \times (l) = l^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2 \quad \text{: المساحة}$$

مثال ٧:

مربع مساحته $A = 49 \text{ cm}^2$ أحسب محيطه .

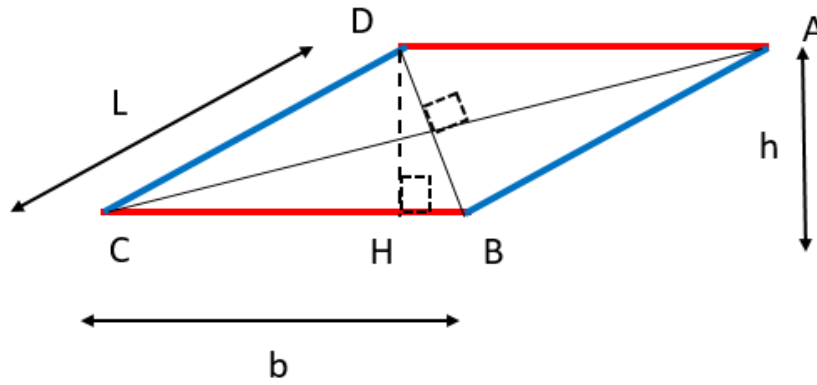
$$A = (l) \times (l) = l^2 \quad \text{: المساحة}$$

$$l = \sqrt{A} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm} \quad \text{: طول ضلع المربع}$$

$$P = 4l = 4 \times 7 = 28 \text{ cm} \quad \text{: المحيط}$$

المعين rhombus

هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة ومن خواصه:



كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان ولا يشترط أن تكون قائمة.

قطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وكل قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينها.

محيط المعين (P) :

$$P = 4l$$

مساحة المعين (A) :

$$A = b \times h$$

حيث: b طول القاعدة

h طول الارتفاع الساقط على هذه القاعدة

ويمكن إيجاد المساحة بدلالة القطرين حيث تكون المساحة:

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

حيث d_1, d_2 طولي القطريين

مثال ٨:

قطعة سجاد على شكل معين طول ضلعه $l = 13 \text{ cm}$ وطول ارتفاعه $h = 5 \text{ cm}$ أحسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

$$P = 4l = 4 \times 13 = 52 \text{ cm} \quad \text{المحيط :}$$

$$A = l \times h = 13 \times 5 = 65 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة :}$$

مثال ٩:

غرفة على شكل معين طولاً قطريها $d_1 = 7 \text{ m}$, $d_2 = 4 \text{ m}$ أوجد مساحتها .

الحل:

مساحة الغرفة

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} (7 \times 4) = 14 \text{ m}^2$$

شبه المنحرف Trapezoid

هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويين ويسميان قاعدتي شبه المنحرف الصغرى والكبرى.

محيط شبه المنحرف (P) :

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه الأربعة}$$

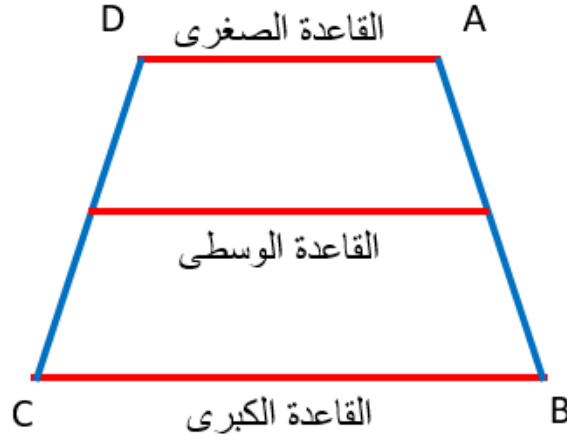
مساحة شبه المنحرف (A) :

$$A = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \times h$$

حيث $b_1 + b_2$ طولي قاعدتيه المتوازيين وتسمى الكمية $\frac{(b_1+b_2)}{2}$ بطول القاعدة المتوسطة (m)

$$A = m \times h$$

حيث طول القاعدة المتوسطة يساوي نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى

**مثال ١٠:**

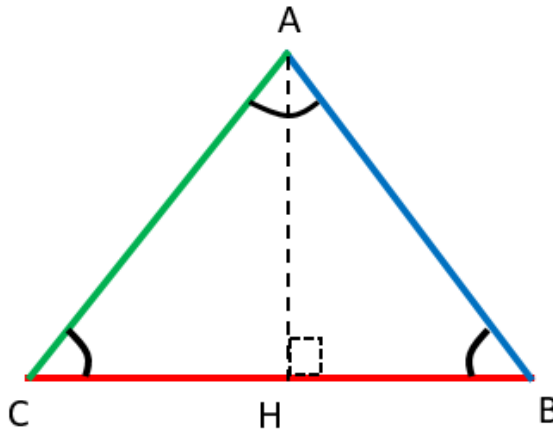
شبه منحرف قاعدته المتوسطة طولها $m = 17 \text{ cm}$ و طول ارتفاعه $h = 11 \text{ cm}$ أحسب مساحته.

الحل:

$$A = m \times h = 17 \times 11 = 187 \text{ cm}^2$$

المثلث Triangle

هو مضلع يتكون من ثلاثة أضلاع و ثلاث زوايا , مجموع زواياه الداخلية 180^0 والشكل المقابل يبين مثلث ABC متطابق الضلعين و AH ارتفاع على الضلع CB

**محيط المثلث (P):**

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه} = AB + BC + AC$$

مساحة المثلث (A) :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

حيث b طول القاعدة h طول الارتفاع الساقط على هذه القاعدة**مثال ١١:**

أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته 12 cm وطول ارتفاعه 8 cm .

الحل:

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48 \text{ cm}^2$$

مثال ١٢:

مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 7 cm . أحسب طول محيطه

الحل:

$$P = \text{المحيط} : AB + BC + AC = 7 + 7 + 7 = 21 \text{ cm} = \text{مجموع أطوال أضلاعه}$$

الدائرة Circle

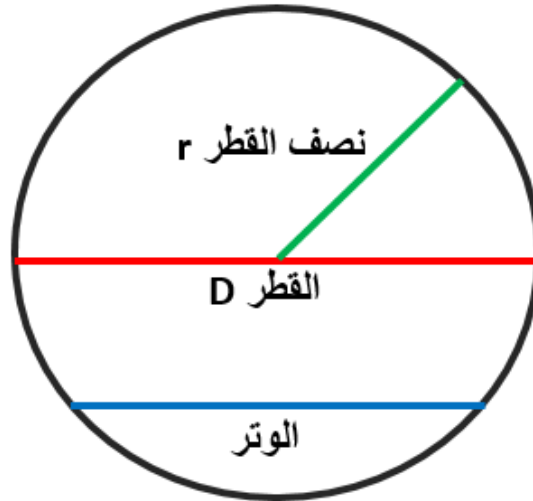
هي مجموعة النقاط التي تبعد نفس البعد عن نقطة ثابتة، هذه النقطة تسمى بمركز الدائرة والبعد الثابت يسمى طول نصف قطر الدائرة.

تعريفات:

☞ **نصف قطر الدائرة:** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.

☞ **قطر الدائرة:** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين على الدائرة وتمر بمركزها.

☞ **وتر الدائرة:** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين على الدائرة.



محيط الدائرة (P): محيط الدائرة التي نصف قطرها r هو :

$$P = 2 \times \pi \times r$$

حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.14$$

مساحة الدائرة (A): مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي :

$$(A) = \pi \times r^2$$

مثال ١٣:

سجادة دائرية الشكل طول قطرها 2.8 m أحسب كلا من طول محيطها ومساحتها.

الحل:

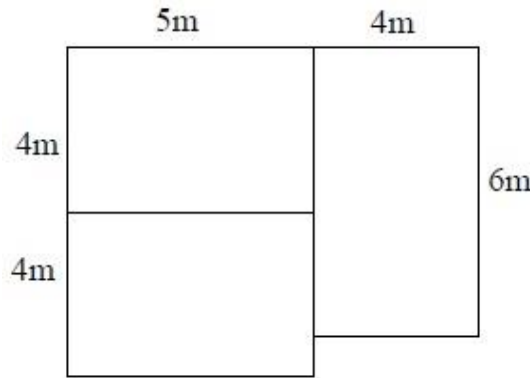
$$r = \frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ m} \quad \text{نصف القطر :}$$

$$P = 2 \times \pi \times r = 2 \times 3.14 \times 1.4 = 8.8 \text{ m} \quad \text{المحيط :}$$

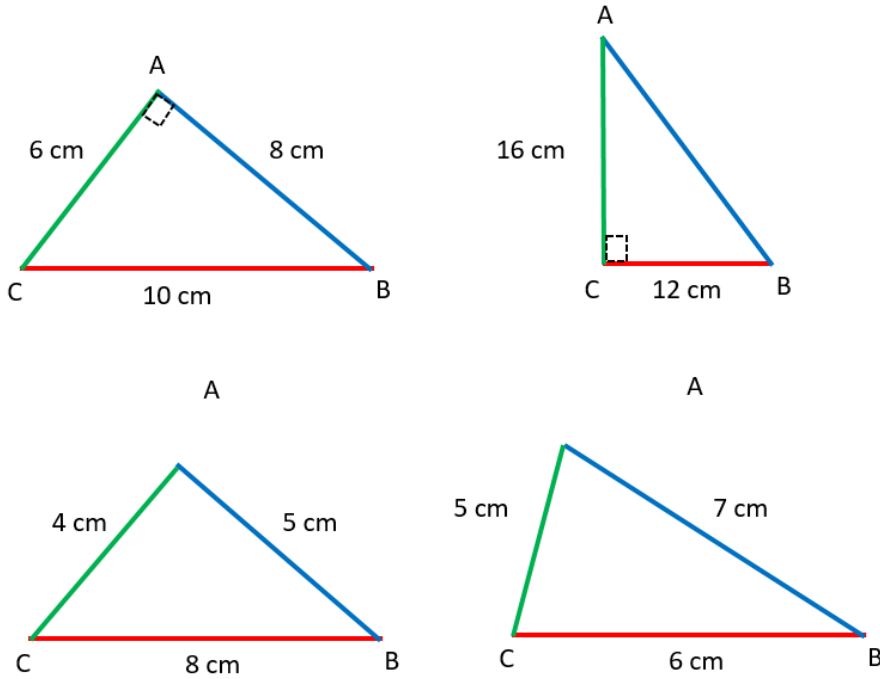
$$(A) = \pi \times r^2 = 3.14 \times (1.4)^2 = 6.2 \text{ m}^2 \quad \text{المساحة :}$$

تمارين (١-٤)

١. قطعة خشب على شكل متوازي أضلاع طول قاعدتها $b = 15 \text{ cm}$ وارتفاعها $h = 6 \text{ cm}$, ما مساحتها؟
٢. متوازي أضلاع مساحته مساحة مربع طول ضلعه 42 cm أحسب طول قاعدة متوازي الأضلاع إذا علمت أن طول ارتفاعه 10 cm .
٣. الشكل المقابل يمثل مخطط بيت مؤلف من ثلاث غرف. أحسب مساحة هذا البيت.



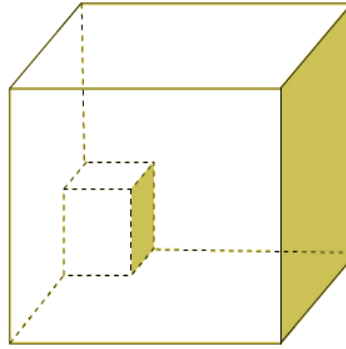
٤. حديقة مربعة الشكل طول ضلعها 27 m , أنشأنا في وسطها حوض ماء دائري الشكل، طول نصف قطره 10 m . ما المساحة المتبقية من الحديقة؟
٥. أوجد مساحتي المثلثين القائمي الزاوية الموجودين بالأعلى ومحيطي المثلثين الموجودين بالأسفل.



الحجوم Size

تعريفات:

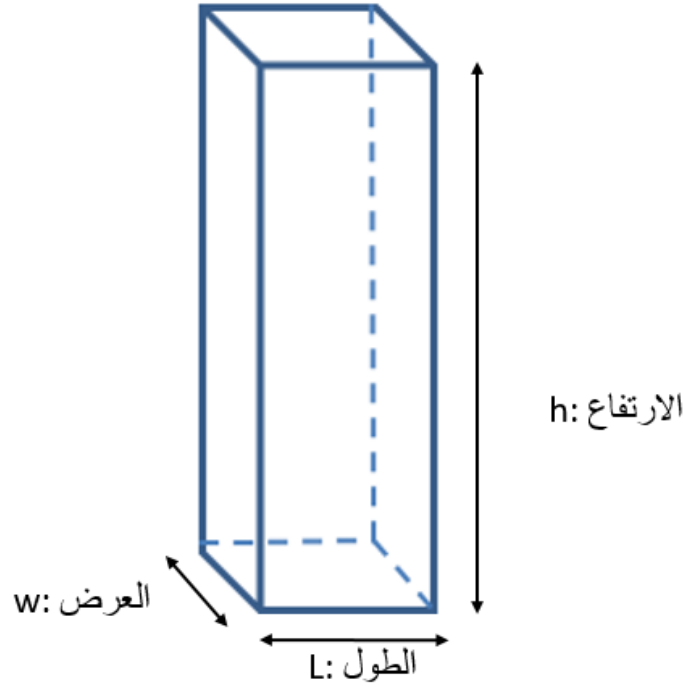
- للأشكال المجسمة: وهي الأشكال التي لها ثلاثة أبعاد وهي الطول والعرض والارتفاع.
- المساحة الجانبية للجسم: وهي مجموع مساحات الأوجه الجانبية لكل جسم أو مساحة السطح الجانبي للجسم.
- المساحة السطحية (الكلية) للجسم: هي عبارة عن المساحة الجانبية للجسم مضافا إليها مساحة قاعدتي الجسم إذا كان له قاعدتان أو مساحة قاعدة الجسم إذا كان له قاعدة واحدة مثل المخروط.
- حجم الجسم: هو عدد ما يحويه الجسم من وحدات مكعبة.



وحدة قياس الحجم تساوي (وحدة طول)³ مثل : mm^3 , cm^3 , m^3 , km^3

متوازي المستطيلات Cuboid

هو جسم كل أوجهه مستطيلات و كل وجهين متقابلين منه متطابقان , و لمتوازي المستطيلات أبعاد ثلاثة : الطول l و العرض w , و الارتفاع h .



المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات:

$$A = 2 \times (l \times w + l \times h + w \times h)$$

حجم متوازي المستطيلات:

$$V = l \times w \times h$$

مثال ١٤:

متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي 11 cm , 9 cm , 7 cm . أحسب مساحته الكلية وحجمه.

الحل:

$$l = 9, w = 7, h = 11$$

المعطيات :

المساحة الكلية:

$$A_T = 2 \times (l \times w + l \times h + w \times h)$$

$$A_T = 2 \times (9 \times 7 + 9 \times 11 + 7 \times 11)$$

$$A_T = 2 \times (63 + 99 + 77) = 478 \text{ cm}^2$$

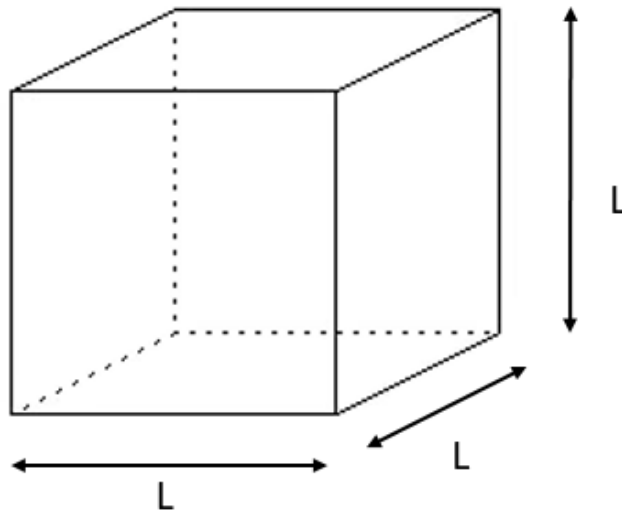
الحجم:

$$V = l \times w \times h$$

$$V = 9 \times 7 \times 11 = 693 \text{ cm}^3$$

المكعب Cube

هو جسم له ستة أوجه متطابقة كل وجه منها عبارة عن مربع. وكل أحرف المكعب الجانبية متساوية وأي مربعين متقابلين فيه يسميان بقاعدتي المكعب.
إذا كان طول ضلع المكعب l فإن :



$$A_1 = 4l^2 \quad \text{مساحته الجانبية}$$

$$A_T = 6l^2 \quad \text{مساحته السطحية أو (الكلية)}$$

$$V = l^3 \quad \text{حجمه}$$

مثال ١٥:

وعاء مكعب الشكل طول حرفه 7 cm. أحسب كلا من مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه.

الحل:

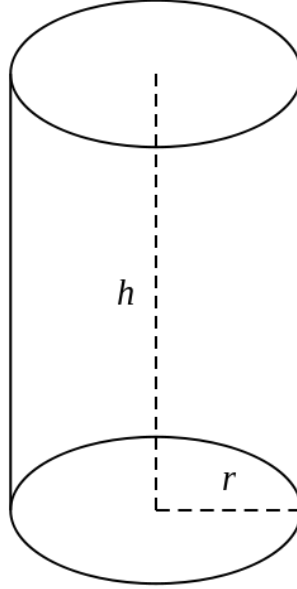
$$A_1 = 4l^2 = 4 \times (7)^2 = 196 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة الجانبية للوعاء}$$

$$A_T = 6l^2 = 6 \times (7)^2 = 294 \text{ cm}^2 \quad \text{المساحة السطحية للوعاء}$$

$$V = l^3 = (7)^3 = 343 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم للوعاء}$$

الأسطوانة Cylinder

وهي جسم له سطح منحنى مغلق وقاعدتها عبارة عن دائرتين متطابقتين ومتوازيتين. ومن الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة. ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين دائرتي قاعدتي الأسطوانة.



مساحته الكلية للأسطوانة:

المساحة الكلية للأسطوانة التي نصف قطرها r و ارتفاعها h هي :

$$A = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h = 2 \pi r (r + h)$$

حجم الأسطوانة:

حجم الأسطوانة التي نصف قطرها r هو:

$$V = \pi r^2 h$$

مثال ١٦:

أسطوانة نصف قطر قاعدتها $r = 9 \text{ cm}$ و ارتفاعها $h = 11 \text{ cm}$. أوجد كلا من مساحتها الكلية وحجمها.

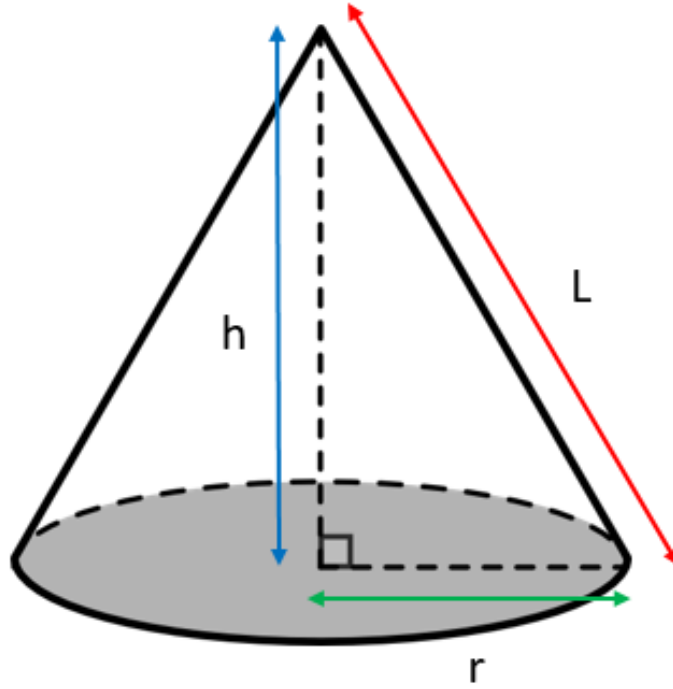
الحل:

$$A = 2 \pi r (r + h) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (9 + 11) = 1130.97 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi r^2 h = 3.14 \times 9^2 \times 11 = 2797.74 \text{ cm}^3$$

المخروط Cone

وهو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r ، ورأس واحد بعده العمودي عن القاعدة يسمى ارتفاع المخروط h . والمسافة بين الرأس أي نقطة على محيط القاعدة تسمى الارتفاع الجانبي l . الأطوال r, h, l هي أضلاع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل:



المساحة الجانبية للمخروط:

المساحة الجانبية للمخروط الذي نصف قطره r وارتفاعه h وارتفاعه الجانبي l هي

$$A_1 = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

المساحة الكلية للمخروط:

المساحة الكلية للمخروط الذي نصف قطره r وارتفاعه h هي

$$A_T = \pi r l + \pi r^2$$

حجم المخروط:

حجم المخروط الذي نصف قطره r وارتفاعه h هو

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

مثال ١٧:

مخروط دائري نصف قطر قاعدته $r = 6 \text{ cm}$ و طول ارتفاعه $h = 8 \text{ cm}$. أحسب مساحته الجانبية والكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للمخروط

$$A_l = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 3.14 \times 6 \times \sqrt{6^2 + 8^2} = 188.4 \text{ cm}^2$$

لمساحة الكلية للمخروط:

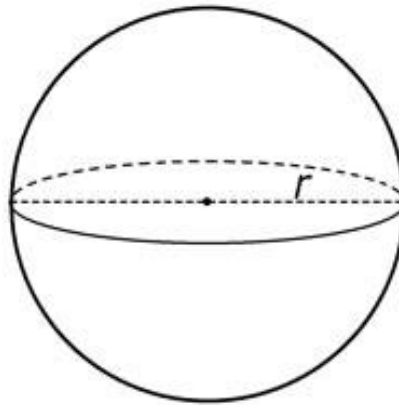
$$A_T = \pi r l + \pi r^2 = 188.4 + 3.14 \times 6^2 = 301.44 \text{ cm}^2$$

حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (6)^2 \times 8 = 301.44 \text{ cm}^3$$

Sphere الكرة

هي جسم ذات سطح منحنى مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة داخل الكرة وتسمى هذه النقطة بمركز الكرة.

**المساحة السطحية للكرة**

المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي :

$$A = 4 \pi r^2$$

حجم الكرة

حجم الكرة التي نصف قطرها r هو :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

مثال ١٨:

كرة نصف قطرها $r = 17 \text{ cm}$ أحسب كلا من حجمها و مساحتها السطحية .

الحل:

المساحة السطحية للكرة:

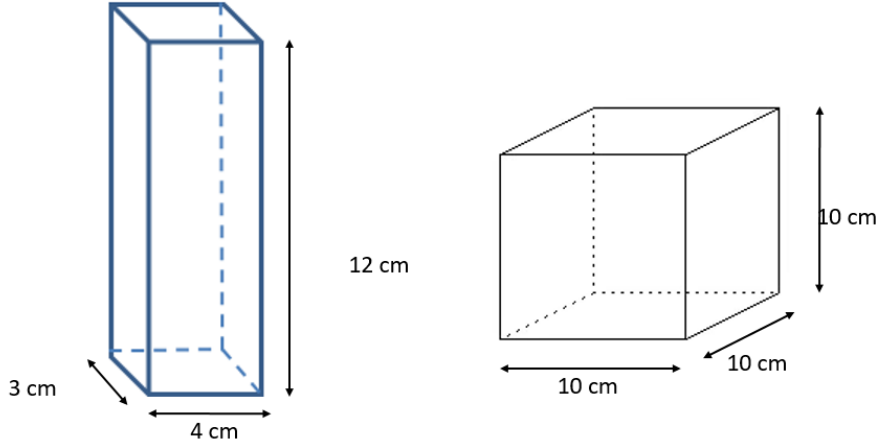
$$A = 4 \pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (17)^2 = 3631.68 \text{ cm}^2$$

حجم الكرة:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 20569.1 \text{ cm}^3$$

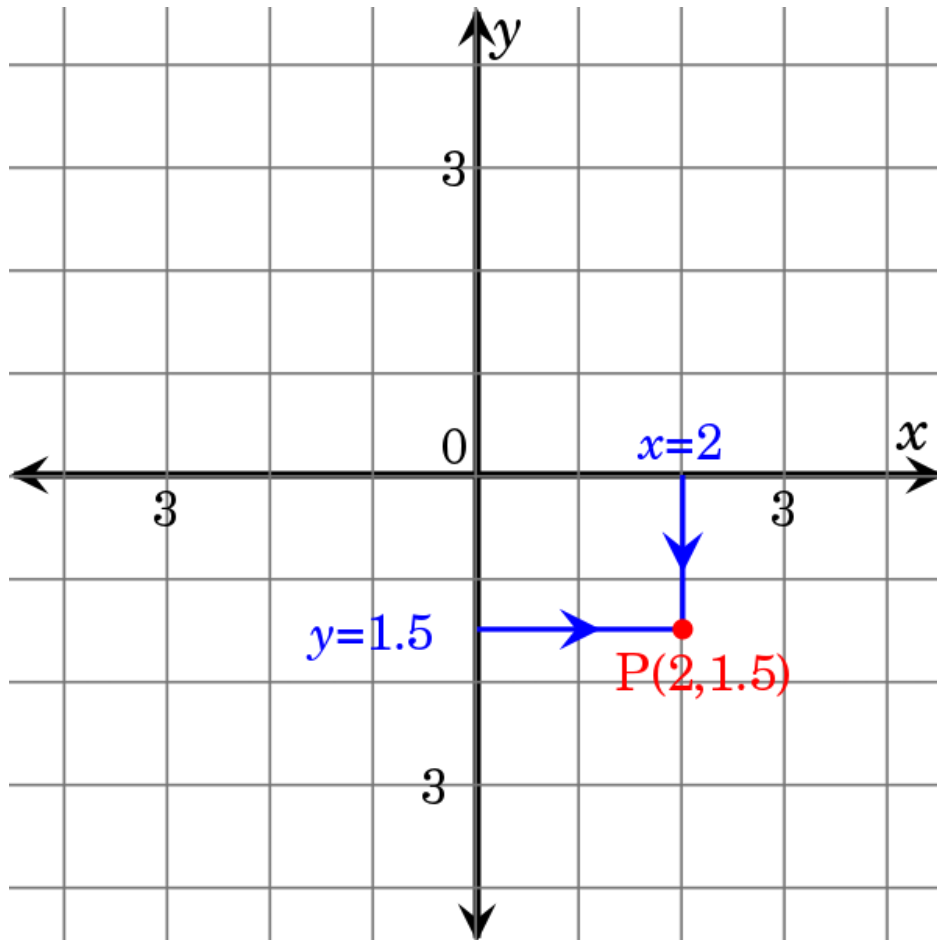
تمارين (٢-٤)

١. بناء على شكل متوازي مستطيلات، طوله 17 m ، وعرضه 13 m ، وارتفاعه 8 m ما مساحة قاعدة هذا البناء؟ وما حجمه؟
٢. أوجد حجم المجسمات التالية ومساحة سطحها الكلي



٣. كرة طول نصف قطرها 7 cm أحسب كلا من حجمها ومساحتها السطحية.
٤. أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 10 cm وارتفاعها 15 cm أوجد الحجم والمساحة الجانبية.

الباب الخامس: الهندسة التحليلية



الهدف العام:

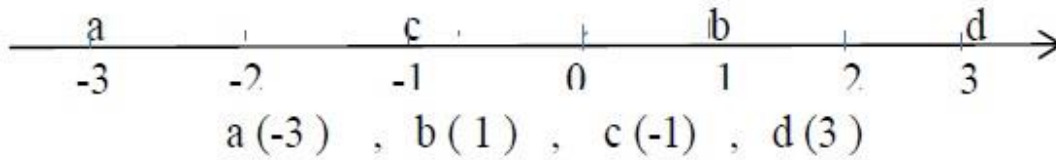
الإلمام بمبادئ الهندسة التحليلية

الأهداف:

- بعد دراسة هذا الباب يكون للطالب القدرة على معرفة:
- ✍ نظام البيان للمعادلة الخطية.
- ✍ حساب المسافة بين نقطتين.
- ✍ حساب ميل ومعادلة الخط المستقيم.
- ✍ كيفية حساب إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور.

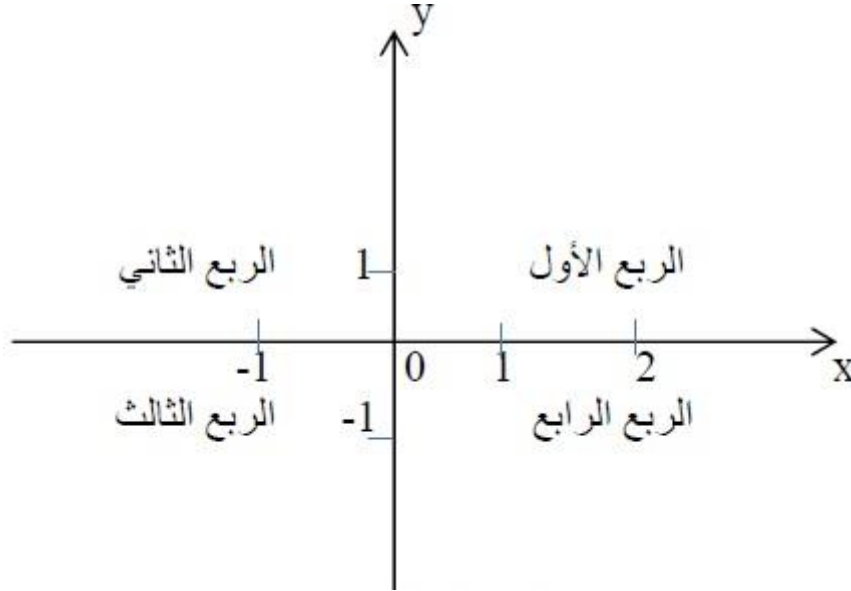
مبادئ الهندسة التحليلية**المحور Axe:**

- هو مستقيم حددنا عليه ثلاثة عناصر:
- ✍ الاتجاه (نختار أحد اتجاهي المستقيم موجب ويكون الآخر هو السالب).
- ✍ نقطة الأصل (نقطة الصفر).
- ✍ وحدة الطول التي على أساسها يتم تقسيم المحور.
- كل نقطة من نقاط المحاور تحدد إحداثياتها بحسب اتجاهها وبعدها عن نقطة الأصل

مثال 1:حدد إحداثيات النقاط a, b, c, d **الحل:**

نظام المحاور الديكارتي

لقد سبق وعرفنا أن كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة وحيدة على خط الأعداد. فكذلك يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل نقاط على مستوى فعلي مستوى ذي بعدين أو محورين x و y كل نقطة يحدد موقعها بزواج مرتب من الأعداد يطلق عليه اسم إحداثيات النقطة. يرمز لهذا الزوج المرتب بـ (a, b) حيث a عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور x و b كذلك عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور y . إحداثيات النقطة تكون معروفة بعد تحديد موقع النقطة بالنسبة للمحور الأفقي x و بالنسبة للمحور العمودي y . تتقاطع المحاور عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل. في الشكل (1) تم تحديد اتجاه المحاور بحيث تظهر الأعداد الموجبة على يمين نقطة الأصل بالنسبة لمحور x وفوق نقطة الأصل بالنسبة للمحور y . المناطق الأربع التي شكلتها هذه المحاور تسمى الأرباع وهي مرقمة عكس اتجاه عقارب الساعة. يسمى هذا النظام ذو البعدين نظام المحاور الديكارتي.

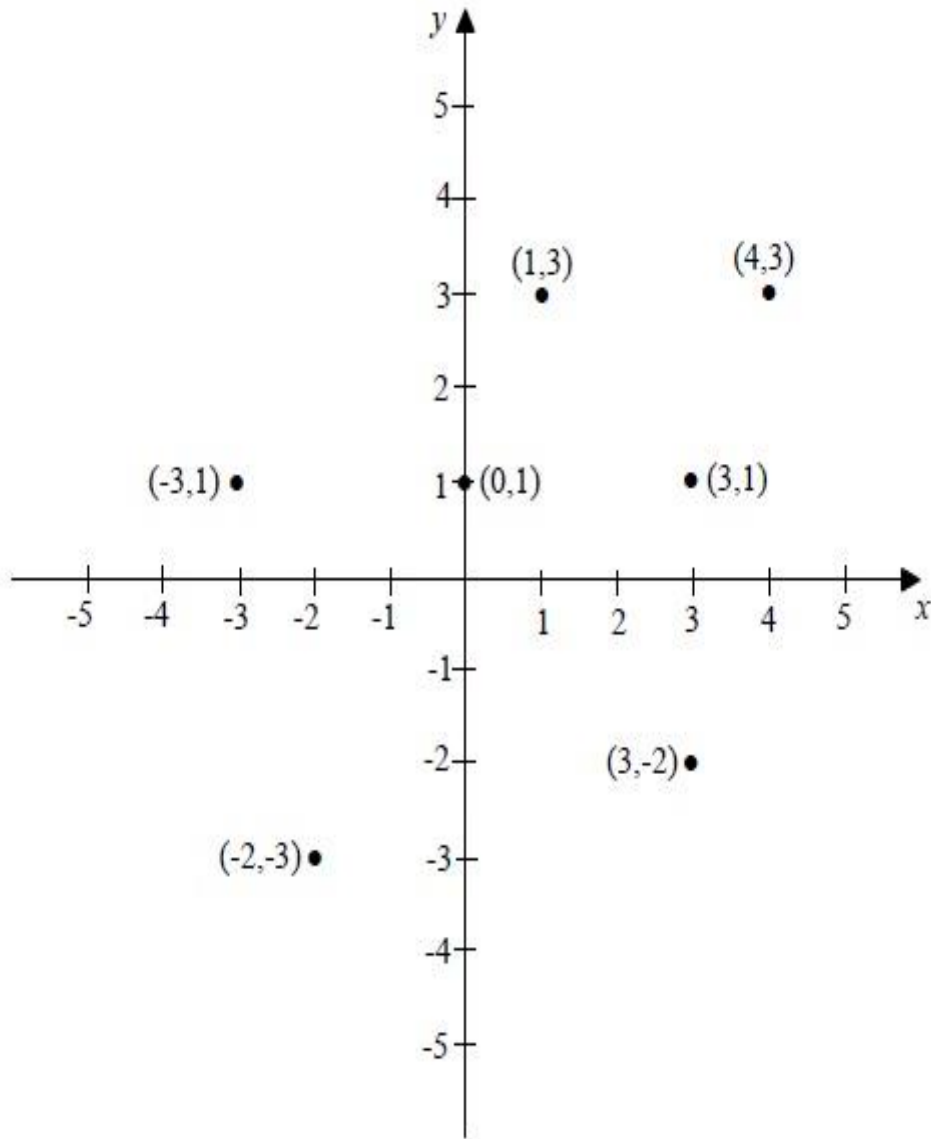


شكل رقم 1

تحديد نقطة معينة $P(a, b)$ يعني رسم النقطة في موقعها من المستوى. في الشكل (2) تم رسم النقاط

$(4, 3), (-3, 1), (-2, -3), (3, -2), (0, 1), (1, 3), (3, 1)$.

ترتيب الأرقام داخل القوس مهم؛ لأنه مثلاً الزوجان $(1, 3)$ و $(3, 1)$ مختلفان و يحددان نقطتين مختلفتين على المستوى.



شكل رقم ٢

المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين على خط أفقي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات x للنقطتين .
 المسافة بين نقطتين على خط عمودي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات y للنقطتين . فمثلا كما
 يبين شكل (٤) فالمسافة d بين النقطة $(1, 2)$ والنقطة $(1, -3)$
 هي: $d = |2 - (-3)| = 5$.

أما اذا لم تقع النقطتان $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ على خط أفقي أو عمودي كما هو موضح في الشكل
 (٣) فالمسافة d تكون طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي أضلاعه القائمة $|x_2 - x_1|$ و
 $|y_2 - y_1|$:

من قانون فيثاغورث:

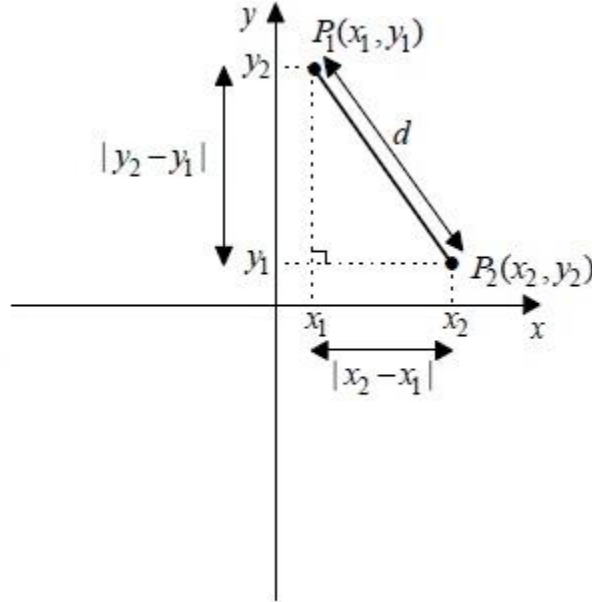
$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Rightarrow d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

ولأن

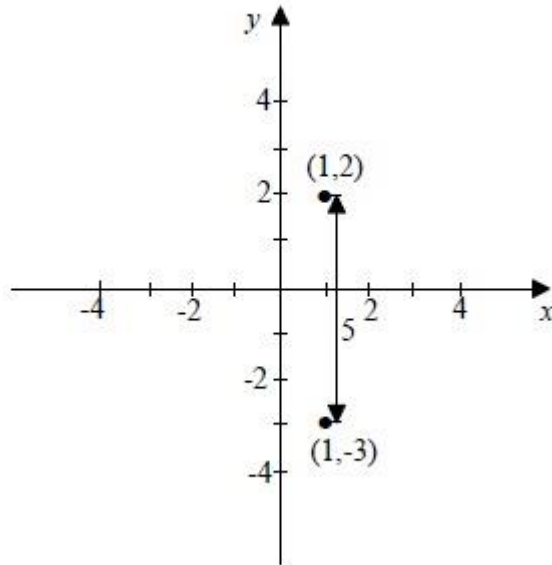
$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \text{ و } |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

فالمسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



شكل رقم ٣



شكل رقم ٤

مثال ٢ :

أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3, 4)$ و $P_2(7, 2)$

الحل:

نستخدم قانون المسافة علما بأن $x_2 = 7$, $x_1 = -3$, $y_2 = 2$, $y_1 = 4$ كالتالي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(7 - (-3))^2 + (2 - 4)^2}$$

$$d = \sqrt{100 + 4}$$

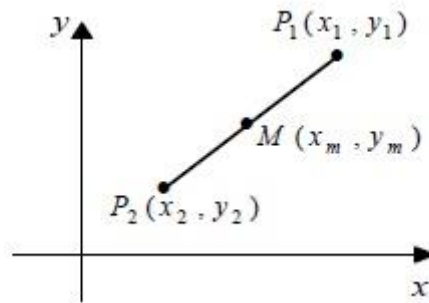
$$d = \sqrt{104}$$

$$d = 10.2$$

إحداثيات نقطة المنتصف

إحداثيات نقطة المنتصف (x_m, y_m) لقطعة مستقيمة كما هو موضح في الشكل (٥) هما متوسط إحداثيات x لنقطتي أطراف القطعة و متوسط احداثيات y لنقطتي أطراف الخط , فيكون القانون كالتالي :

$$(X_m, Y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



شكل رقم ٥

مثال ٣:

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة المحددة بالنقطتين $P_2(7, 2)$ و $P_1(-3, 4)$

الحل:

نستخدم قانون نقطة المنتصف علما بأن $x_2 = 7$, $x_1 = -3$, $y_2 = 2$, $y_1 = 4$ كالتالي:

$$(X_m, Y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-3 + 7}{2}, \frac{4 + 2}{2} \right) = (2, 3)$$

تمارين (١-٥)

تمرين ١:

ارسم النقاط التالية على نظام محاور ديكارتي:

1) $(2, 4)$

2) $(0, -3)$

3) $(-2, 1)$

4) $(-5, -3)$

5) $(-3, -5)$

6) $(-4, 3)$

7) $(0, 2)$

8) $(-2, 0)$

تمرين ٢:

أوجد المسافة بين كل نقطتين مما يلي:

1) $(7, 11), (3, 8)$

2) $(-3, -20), (-10, 4)$

3) $(6, -8), (0, 0)$

4) $(\sqrt{3}, \sqrt{75}), (\sqrt{12}, \sqrt{27})$

5) $(a, b), (-a, -b)$

6) $(a - b, b), (a, a + b)$

تمرين ٣:

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطع المستقيمة التالية:

1) $(1, -1), (5, 5)$

2) $(4, 7), (6, 10)$

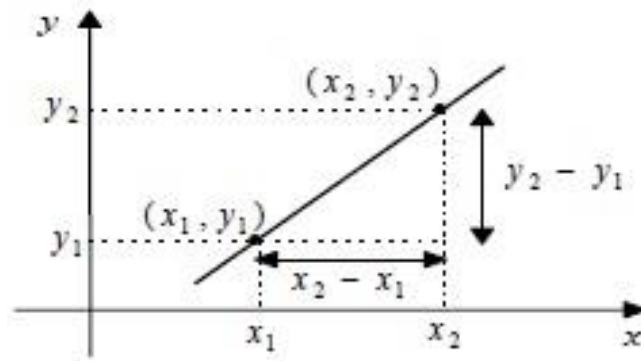
3) $(6, -3), (6, 11)$

4) $(2a, 0), (0, 2b)$

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم (m) غير العمودي هو نسبة التغير في الاحداثي y الى التغير في الاحداثي x في كل نقطتين من نقاط المستقيم . عاين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على الخط المستقيم في الشكل (٦) تسمى المسافتان التغير في y ($\Delta y = y_2 - y_1$) و التغير في x ($\Delta x = x_2 - x_1$) . فبهذا التعريف يصبح قانون الميل كالتالي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



شكل رقم ٦

مثال ٤:

أوجد ميل المستقيم المار في النقطتين $a(2, 7)$, $b(4, 11)$

الحل:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 7}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

معادلة الخط المستقيم

طريقة الميل ونقطة

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1, y_1) . إذا كانت (x, y) نقطة أخرى على الخط المستقيم من قانون الميل:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

نستنتج معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال ٥:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 و يمر بالنقطة $(1, -2)$

الحل:

في هذا المثال $m = 3$ و $(x_1, y_1) = (1, -2)$ اذن بالتعويض المباشر في القانون نجد :

$$y = 3(x - 1) + (-2)$$

$$y = 3x - 3 - 2$$

$$y = 3x - 5$$

مثال ٦:

أوجد معادلة الخط الم الذي يمر بالنقطتين $a(2, 5)$, $b(4, 3)$

الحل:

في هذه الحالة نستخدم النقطتين لإيجاد ميل الخط ثم نستخدم هذا الميل مع احدى النقطتين المعطاة لإيجاد معادلة الخط المستقيم

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن باستخدام $m = -1$ و النقطة $(4, 3)$ مثلا تكون معادلة الخط كالتالي :

$$y = -1(x - 4) + 3$$

$$y = -x + 4 + 3$$

$$y = -x + 7$$

طريقة الميل والجزء المقطوع

عادة ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تسمى طريقة الميل والجزء المقطوع وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y = mx + q$$

حيث m هو ميل الخط و q يمثل الجزء المقطوع على المحور y عند النقطة $(0, q)$. وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٧:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 و يقطع من المحور y جزءا مقداره 3

الحل:

الشكل العام لمعادلة المستقيم هي

$$y = mx + q$$

$$m = 2, \quad q = 3$$

تكون معادلة المستقيم هي:

$$y = 2x + 3$$

خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة:

لـ شكل المعادلة (الميل ونقطة):

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

لـ شكل المعادلة (الميل والميل والجزء المقطوع):

$$y = mx + q$$

لـ شكل المعادلة (المستقيم يمر بنقطة الأصل):

$$y = mx$$

لـ المستقيم الأفقي – الموازي للمحور X – (الميل يساوي صفر) و يمر بالنقطة (x_1, y_1) تكون معادلته:

$$y = y_1$$

لـ المستقيم الرأسي – الموازي للمحور Y – (الميل يساوي ∞) و يمر بالنقطة (x_1, y_1) تكون معادلته:

$$x = x_1$$

مثال ٨:

أوجد معادلة كل من المستقيمتين التاليتين:

١. ميله 5 ويمر في نقطة الأصل.

٢. يوازي المحور X ويمر في النقطة $(4, 8)$.

٣. يوازي المحور Y ويمر في النقطة $(-2, 8)$.

الحل:

1) $y = 5x$

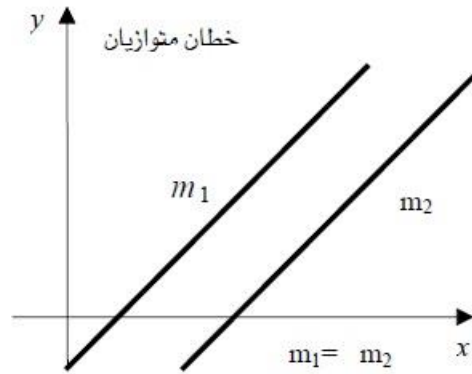
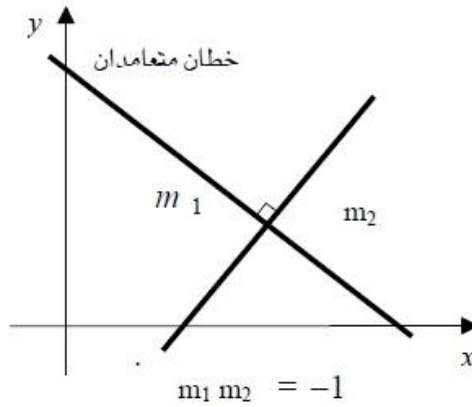
2) $y = 8$

3) $x = -2$

الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة توازي أو تعامد مستقيمين كما هو موضح في الشكل (٧) وبالتحديد يكون المستقيمان متوازيين إذا فقط إذا كان ميلاهما $(m_1 = m_2)$ ويكونان متعامدين إذا فقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة

$$\left(m_1 = -\frac{1}{m_2}\right)$$



شكل رقم ٧

مثال ٩:

أوجد ميل الخط المستقيم في كل من الحالات التالية:
المستقيم الموازي للخط المستقيم الذي معادلته:

$2x - 3y = 5$

المستقيم العمودي للخط المستقيم الذي معادلته:

$$2x - 3y = 5$$

الحل:

أولا نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y = mx + q$ كالتالي :

$$2x - 3y = 5$$

$$-3y = -2x + 5$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

إذن ميل الخط المستقيم هو $m = \frac{2}{3}$ و بالتالي :

١. ميل المستقيم الموازي $m_1 = m = \frac{2}{3}$

٢. ميل المستقيم العمودي $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{2}$

نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

١. نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور x .

تكون إحداثية y تساوي الصفر أي نعوض في المعادلة بـ $y = 0$

٢. نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور y .

تكون إحداثية x تساوي الصفر أي نعوض في المعادلة بـ $x = 0$

مثال ١٠:

أوجد إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y = 2x + 3$ مع المحاور.

الحل:

التقاطع مع المحور x :

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = 2x + 3 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

أذن نقطة التقاطع مع المحور x هي: $(-\frac{3}{2}, 0)$

التقاطع مع المحور y :

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y = 2(0) + 3 \Rightarrow y = 3$$

أذن نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0, 3)$

تمارين (٢-٥)

تمرين ١:

أوجد ميل الخطوط المستقيمة التي تمر بكل من النقطتين فيما يلي:

1) $(3, 7), (5, 11)$

2) $(3, -4), (5, 2)$

3) $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$

تمرين ٢:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة و لديه الميل المعطى m

1) $(4, 11), m = 2$

2) $(6, 7), m = \frac{2}{3}$

3) $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), m = -\frac{3}{5}$

4) $(0, 2), m = 4$

5) $(0, 4), m = 0$

تمرين ٣:

أوجد ميل ونقطة التقاطع مع المحاور إذا كان ذلك ممكنا للخطوط المستقيمة التالية:

1) $x + 5y = 20$

2) $6x - 5y = 15$

3) $x = 4$

4) $y = -1$

تمرين ٤:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

1) $(2, 1), (0, -3)$

2) $(-3, -4), (1, 4)$

3) $(0, 0), (-1, 3)$

4) $(-3, 6), (1, 2)$

5) $(1, -2), (3, -2)$

6) $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

المصطلحات العلمية

المصطلح باللغة الإنجليزية	المصطلح باللغة العربية
Area	مساحة
Axe	محور
Cartesian Coordination System	نظام المحاور الديكارتي
Circle	دائرة
Cone	المخروط
Cube	مكعب
Cuboid	متوازي المستطيلات
Cylinder	أسطوانة
Determinant	محدد
Differentiation	التفاضل
Equation	معادلة
Function	الدالة
Line	خط
Mathematics	رياضيات
Parallel	متوازي
Parallelogram	متوازي أضلاع
Perpendicular	عمودي
Polynomial	كثيرات الحدود
Rectangle	مستطيل
Set	مجموعة
rhombus	معين
Size	حجم
Slope	ميل
Square	مربع
Sphere	كرة
Trapezoid	شبة المنحرف
Triangle	مثلث

المراجع

1. Hoboken, NJ, "**The Universal Book of Mathematics**", John Wiley, 2004.
2. Christopher Clapham, "**The Concise Oxford Dictionary of Mathematics**", 3rd ed, Oxford, UK: Oxford University Press, 2005.
3. John D. Berr, "**Dictionary of Mathematics**", London: Fitzroy Dearborn, 1999.